# Algoritimi e Strutture Dati
# Introduzione al corso

Luciano Bononi
Dip. di Scienze dell'Informazione
Università di Bologna

bononi@cs.unibo.it
http://www.cs.unibo.it/~bononi/

Slides credits: Moreno Marzolla

Copyright © 2011, Luciano Bononi and Moreno Marzolla,
Università di Bologna, Italy

*This work is licensed under the Creative Commons Attribution-ShareAlike License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/ or send a letter to Creative Commons, 543 Howard Street, 5th Floor, San Francisco, California, 94105, USA.*

# Presentiamoci

- Luciano Bononi
  **bononi@cs.unibo.it**
  **http://www.cs.unibo.it/~bononi/**
- Lezioni
  - Martedì ore 13:30—15:30, aula Ercolani 1
  - Venerdì ore 11:30—13:30, aula Ercolani 1
- Orario di ricevimento
  - Giovedi ore 14.30-16.30 (da concordare sempre via email!)
  - Mura Anteo Zamboni 7, Ufficio T08

# Informazioni generali sul corso

# Sito web del corso

- http://www.cs.unibo.it/~bononi/
  - > Courses > Algoritmi e Strutture Dati (11929)
- Trovate:
  - **Avvisi!**
  - Lucidi delle lezioni
  - Esercizi
  - Link a ulteriori approfondimenti
  - Più avanti... Testi degli esami precedenti
- Controllate anche il feed degli avvisi sul sito UniBO:

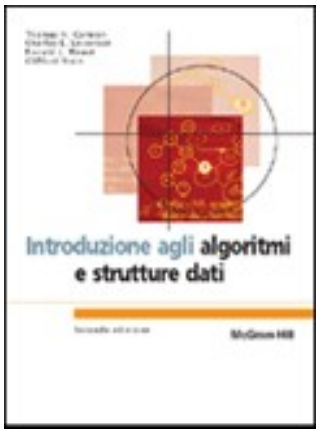
http://www.unibo.it/SitoWebDocente/default.htm?upn=luciano.bononi%40unibo.it

http://www.unibo.it/SitoWebDocente/default.htm?upn=luciano.bononi%40unibo.it&TabControl1=TabAvvisi

# Testo adottato

- Camil Demetrescu, Irene Finocchi, Giuseppe F. Italiano, *Algoritmi e strutture dati* 2/ed, McGraw-Hill ISBN: 9788838664687, Giugno 2008

# Testi consigliati


- Alan Bertossi, Alberto Montresor, *Algoritmi e strutture di dati 2/ed*, Città Studi, ISBN: 9788825173567
  - I contenuti sono pressoché equivalenti a quelli del testo adottato
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein, *Introduzione agli algoritmi e strutture dati 2/ed*, McGraw-Hill, ISBN: 9788838662515, Maggio 2005
  - Per chi vuole approfondire

# Propedeuticità

- Per sostenere l'esame è necessario aver superato l'esame di Programmazione Internet+Lab. Programmazione Internet

# Programma del corso

- Complessità asintotica degli algoritmi
- Strutture dati elementari (Liste, Pile, Code, Alberi...)
- Algoritmi di ordinamento e ricerca
- Alberi di ricerca
- Tabelle Hash
- Tecniche Algoritmiche (divide et impera, algoritmi *greedy,* programmazione dinamica*)*
- Algoritmi su grafi (spanning tree, cammini minimi, problemi di flusso)

# Modalità d'esame

- Esame scritto obbligatorio
  - L'esame può essere superato sostenendo due prove parziali
  - Sarà possibile recuperare uno dei due parziali
- Mini-progetti facoltativi
  - Da svolgere singolarmente, in linguaggio Java
  - Ne verranno assegnati 2 o 3 durante il corso
  - Un progetto consegnato e valutato positivamente vale 1 punto; un progetto non consegnato o non sufficiente vale 0 punti.
  - I punti guadagnati con i progetti verranno sommati al voto dello scritto

# Un suggerimento

- Nei lucidi troverete una serie di domande che vengono lasciate a voi per esercizio.
  - In alcuni casi la risposta si trova nel libro di testo; in generale dovreste essere in grado di rispondere da soli.
  - Provate a rispondere: potreste ritrovarle come domande d'esame.
- TUTTO il materiale viene inserito nella pagina del corso:

  http://www.cs.unibo.it/~bononi/

# Un (altro) suggerimento

- La pratica è fondamentale: lo studio degli algoritmi non sono uno sport da seguire come “spettatori”
  - Scrivete molti algoritmi
  - Dimostratene la correttezza
  - Analizzare la loro efficienza
- Descriveremo gli algoritmi mediante pseudocodice
  - Per poterne dare una versione compatta senza perdersi in dettagli implementativi
- In alcuni casi verranno mostrati esempio di codice Java

# FAQ

- Questo è un esame facile?
  - No.
- È sufficiente studiare sui lucidi?
  - I lucidi sono fatti per integrare lo studio individuale, e soprattutto lo studio sul libro di testo.
- Posso rifare lo scritto?
  - Sì. La consegna dello scritto annulla automaticamente l'eventuale voto precedente.
- Posso rifare uno o più progetti?
  - No. Ogni mini-progetto può essere consegnato una sola volta. Se il progetto è insufficiente (o non viene consegnato entro la scadenza) non può essere riconsegnato

# FAQ

- Si puo' fare l'orale?
  - No (dipende).
  - In casi particolari il docente si riserva la facoltà di richiedere chiarimenti orali sui progetti e/o sulle prove scritte, ad esempio in casi di sospetta “copiatura”.
- Queste slide non ci sono sul sito del corso / Queste slide sono diverse sul sito del corso
  - Cerco di mettere a disposizione le slide aggiornate prima della lezione, ma non sempre ci riesco
  - In ogni caso metto sempre i lucidi online dopo la lezione
  - Talvolta trovo (o mi vengono segnalati) errori in lucidi di lezioni passate. Controllate spesso la pagina del corso per aggiornamenti

# Algoritmi e strutture dati

# Cos'è un algoritmo?

- Un algoritmo è un procedimento per risolvere un problema mediante una sequenza finita di passi elementari
- Il procedimento deve essere descritto in modo preciso allo scopo di poterne automatizzare l'esecuzione
- Il termine deriva dal nome del matematico persiano Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Khwarizmi
  - Autore di un primo fondamentale trattato di algebra
  - Un cratere lunare porta il suo nome

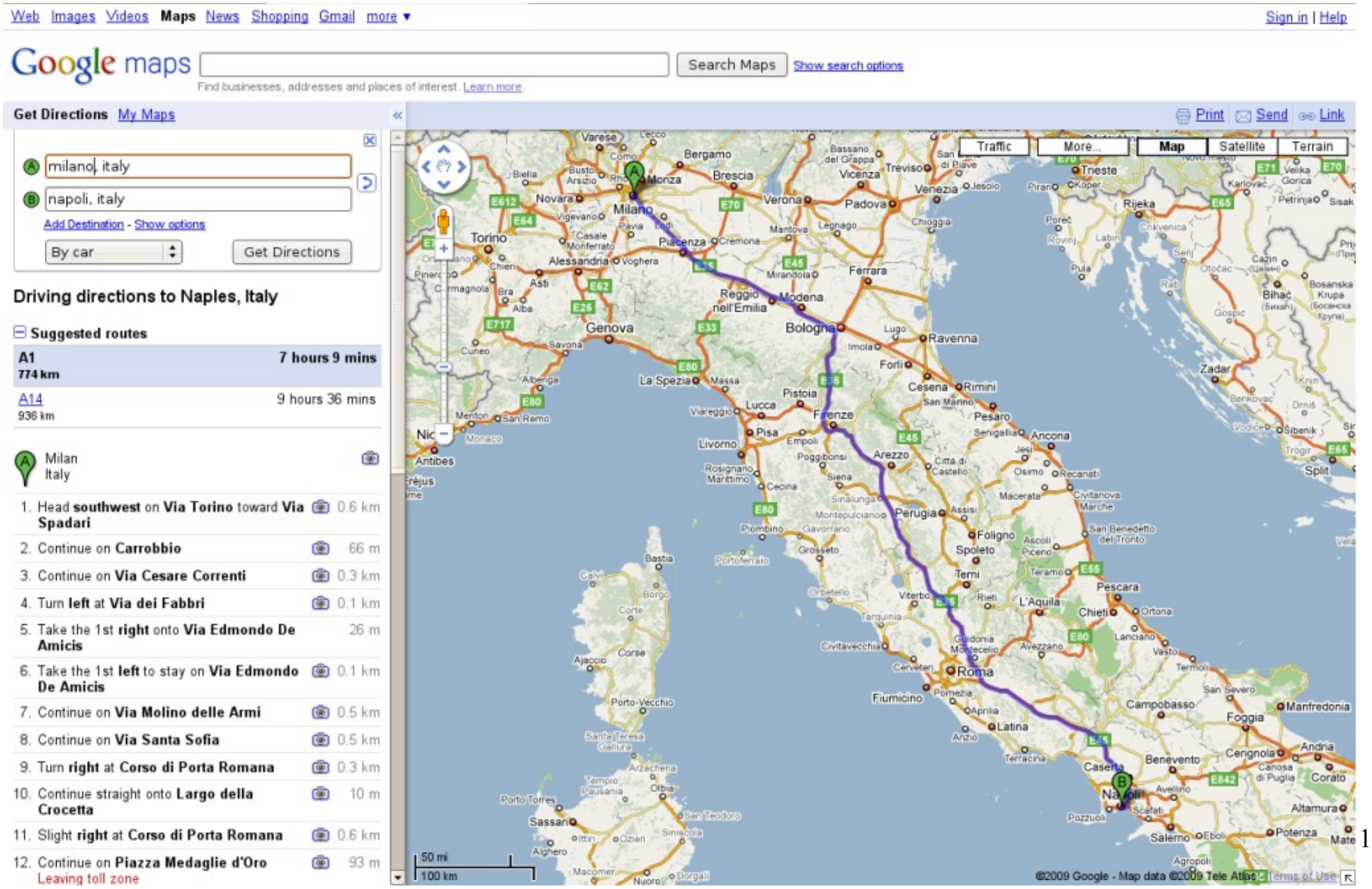
# Algoritmo vs Programma

- Un algoritmo descrive (ad alto livello) una procedura di calcolo che, se seguita, consente di ottenere un certo risultato
- Un programma è l'implementazione di un algoritmo mediante un opportuno linguaggio di programmazione.
  - Un programma può essere direttamente eseguito da un calcolatore (processo in esecuzione); un algoritmo solitamente no.

# Gli algoritmi sono ovunque!

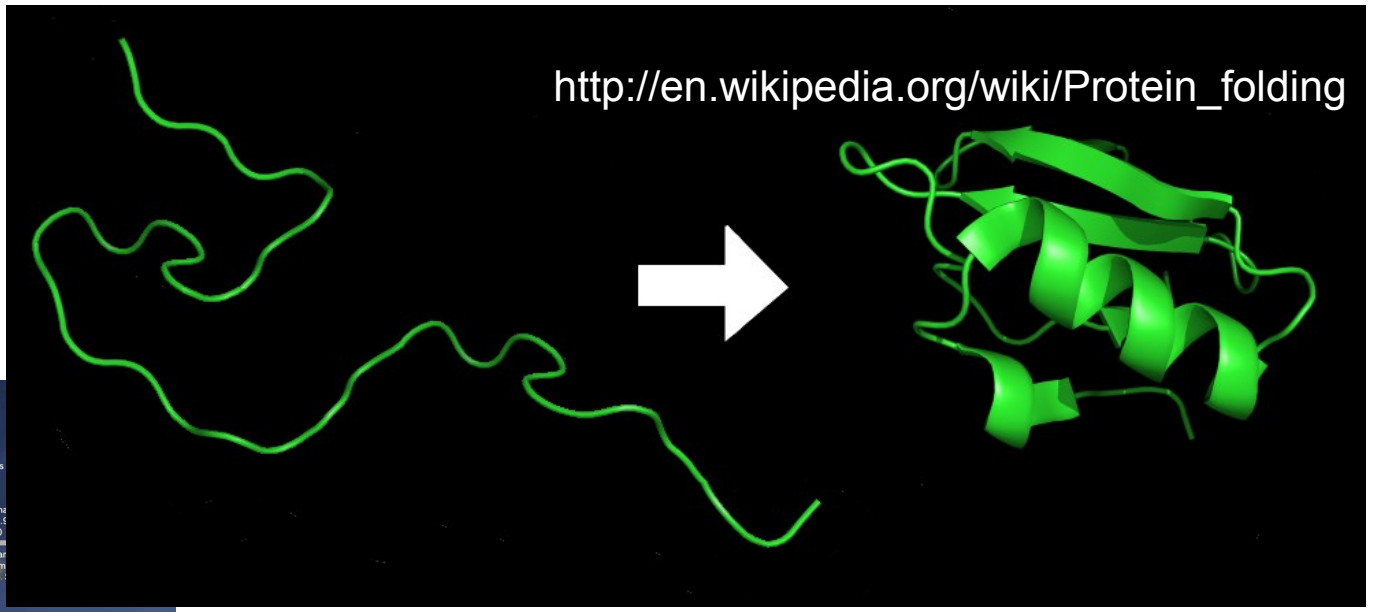
- Internet. Web search, packet routing, distributed file sharing.
- Biology. Human genome project, protein folding.
- Computers. Circuit layout, file system, compilers.
- Computer graphics. Movies, video games, virtual reality.
- Security. Cell phones, e-commerce, voting machines.
- Multimedia. CD player, DVD, MP3, JPG, DivX, HDTV.
- Transportation. Airline crew scheduling, map routing.
- Physics. N-body simulation, particle collision simulation.
- ...

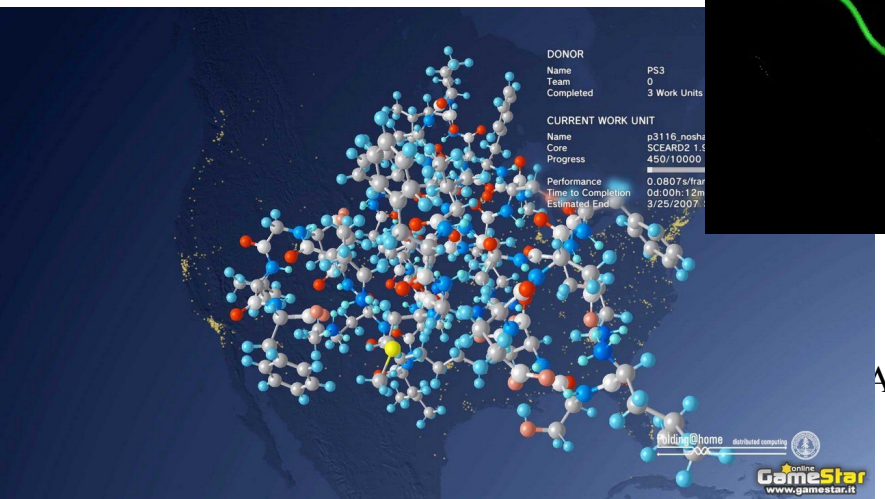
# Perché studiare gli algoritmi?



# Perché studiare gli algoritmi?

- Le proteine assumono una ben precisa struttura tridimensionale a causa dell'interazione degli aminoacidi che le compongono
- Si ritiene che certe malattie neurodegenerative siano causate dall'accumulo di proteine che si ripiegano in maniera “scorretta”
- Folding@Home



# Perché studiare gli algoritmi?

- Eliminazione superfici nascoste, strutture dati per codificare l'ambiente di gioco, simulazioni fisiche (collisioni, movimento dei tessuti, sistemi di particelle—fuoco, nebbia, acqua...)

# Perché studiare gli algoritmi?

- Per divertimento
- Per profitto
  - Un algoritmo efficiente può fare la differenza tra il poter risolvere un problema e non poterlo risolvere
- Perché alcuni degli algoritmi che studieremo furono inventati da studenti

# Cosa imparerete in questo corso?

- Quali sono gli algoritmi “classici” per risolvere problemi ricorrenti
  - Ordinamento, ricerca, problemi su grafi...
- Come valutare l'efficienza di un algoritmo
- Come sviluppare nuovi algoritmi per risolvere problemi che si presentano

# Esempio “di riscaldamento”: i numeri di Fibonacci

- La successione di Fibonacci $F_1, F_2, \ldots F_n, \ldots$ è definita come:

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n > 2$$

Leonardo Fibonacci
(Pisa, 1170—Pisa, 1250)
http://it.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

# Formula chiusa

- Buona notizia: esiste una semplice formula chiusa per il valore di $F_n$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \hat{\Phi}^n\right)$$

ove

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \qquad \hat{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

- Cattiva notizia: la valutazione di tale formula introduce errori numerici dovuti alla necessità di fare calcoli in virgola mobile

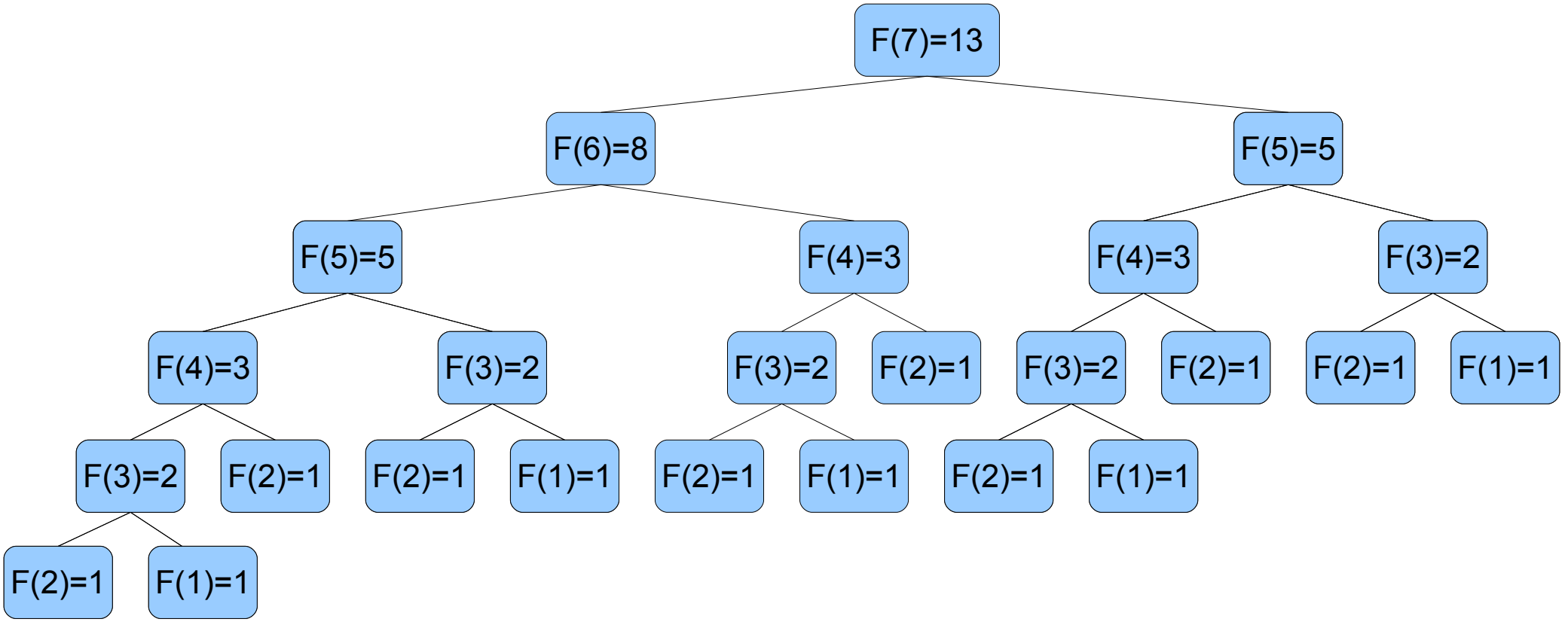
# Algoritmo banale

- Definiamo un algoritmo per il calcolo dell'n-esimo numero di Fibonacci utilizzando la definizione ricorsiva

```
algoritmo Fibonacci2(int n) → int
    if ( n==1 || n==2 ) then
        return 1;
    else
        return Fibonacci2(n-1)+Fibonacci2(n-2);
    endif
```

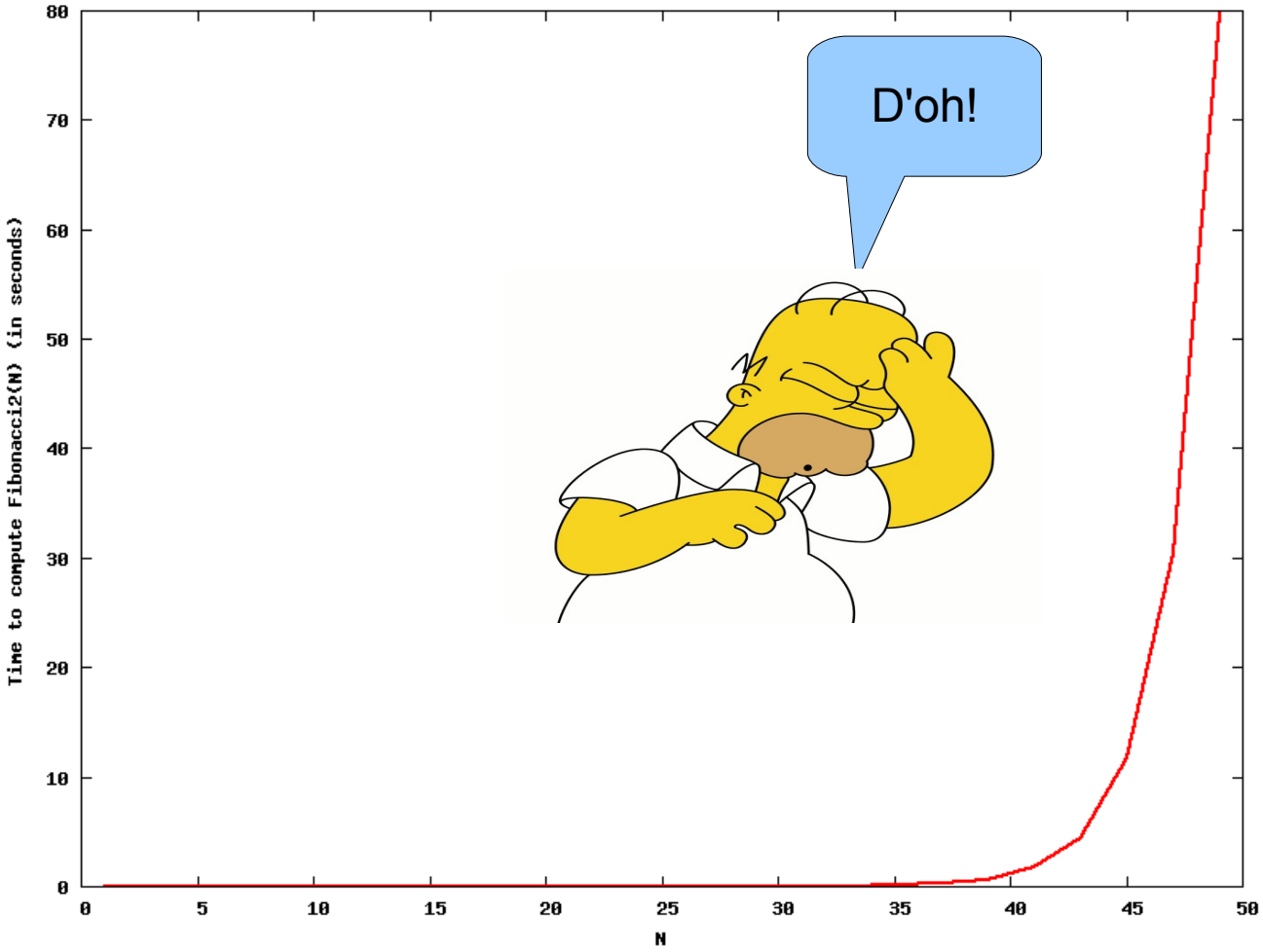
- L'algoritmo è descritto mediante pseudocodice; la sua traduzione in Java (o qualsiasi altro linguaggio) è immediata

# Albero di ricorsione



# C'è un “piccolo” problema...

- Il tempo necessario per calcolare $F_n$ cresce in maniera “preoccupante” all'aumentare di $n$

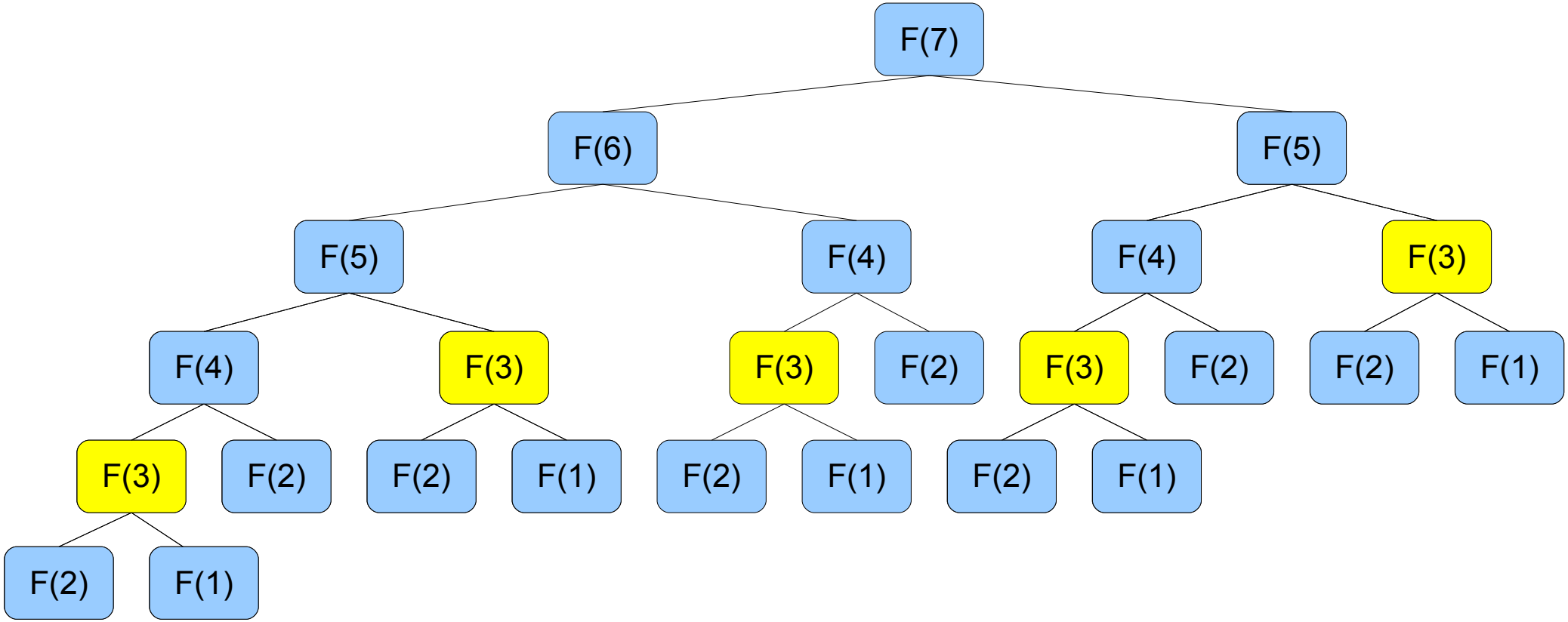


# Stima del tempo di esecuzione

- Misurare il tempo di esecuzione in secondi?
  - Dipende dalla macchina su cui si fanno le misure
- Misurare il numero di istruzioni in linguaggio macchina eseguite?
  - Anche questo dipende dalla macchina su cui si fanno le misure, e in più è una quantità difficile da desumere a partire dallo pseudocodice
- Stimiamo il tempo di esecuzione calcolando il numero di operazioni elementari eseguite nello pseudocodice

# Identifichiamo il problema

- I valori intermedi vengono ricalcolati più volte



# Stima del tempo di esecuzione

- Sia *T(n)* il tempo necessario a calcolare l'*n*-esimo numero di Fibonacci.
- Possiamo stimare *T(n)* come il numero di nodi dell'albero di ricorsione per $F_n$
  - **Domanda**: dare una espressione ricorsiva del numero T(n) di nodi dell'albero di ricorsione per il calcolo di $F_n$

# Stima del tempo di esecuzione

- È possibile dimostrare (per induzione) che

$$T(n) = 2F_n - 1$$

  - **Domanda**: dimostrare la relazione sopra
- Ricordando la formula chiusa per $F_n$ possiamo subito concludere che $T(n)$ cresce in modo esponenziale
- Possiamo anche calcolare direttamente un limite inferiore a T(n)
  - Vedi pagina successiva

# Stima del tempo di esecuzione

```
algoritmo Fibonacci2(int n) → int
    if ( n==1 || n==2 ) then
        return 1;
    else
        return Fibonacci2(n-1)+Fibonacci2(n-2);
    endif
```

- Sia T(n) il numero di nodi dell'albero di ricorsione per il calcolo di $F_n$
  - *T(1) = T(2) = 1*;
  - *T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1* (se *n>2*)
  - È simile alla relazione di ricorrenza che definisce $F_n$

# Limite inferiore al tempo di esecuzione

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1)+T(n-2)+1 \\
&\geq 2\mathrm{T}(n-2)+1 \\
&\geq 4\mathrm{T}(n-4)+2+1 \\
&\geq 8\mathrm{T}(n-6)+2^2+2+1 \\
&\geq \ldots \\
&\geq 2^k T(n-2\mathrm{k})+\sum_{i=0}^{k-1} 2^i \\
&\geq \ldots \\
&\geq 2^{\lfloor n/2 \rfloor} + \frac{2^{\lfloor n/2 \rfloor}-1}{2-1} \\
&\geq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}
\end{aligned}
$$

Sfruttiamo il fatto che T(n) è monotona crescente

La ricorsione termina quando k=n/2

# Possiamo fare di meglio?

- Utilizziamo un vettore di lunghezza *n* per calcolare e memorizzare i valori di $F_1$, $F_2$, ... $F_n$

```
algoritmo Fibonacci3(int n) → int
    Sia Fib[1..n] un array di n interi
    Fib[1] := 1;
    Fib[2] := 1;
    for i:=3 to n do
        Fib[i] := Fib[i-1] + Fib[i-2];
    endfor
    return Fib[n];
```

# Quanto costa?

- Stiamiamo il “costo” dell'algoritmo Fibonacci3 contando le righe di (pseudo-)codice eseguite

```
algoritmo Fibonacci3(int n) → int
    Sia Fib[1..n] un array di n interi
    Fib[1] := 1; // ....................   1 volta
    Fib[2] := 1; // ....................   1 volta
    for i:=3 to n do // ................   (n-1) volte
        Fib[i] := Fib[i-1] + Fib[i-2]; //   (n-2) volte
    endfor
    return Fib[n];   // ................   1 volta
                     // Totale...........   2n
```

- Tempo proporzionale a n
- Spazio proporzionale a n

# Possiamo fare di meglio?

- L'occupazione di memoria di Fibonacci3 è proporzionale a n. Possiamo ridurla?
- Sì, se osserviamo che per calcolare $F_n$ basta ricordare i due valori precedenti $F_{n-1}$ e $F_{n-2}$

```
algoritmo Fibonacci4(int n) → int
if ( n==1 || n==2 ) then
    return 1;
else
    F_nm1 := 1;
    F_nm2 := 1;
    for i:=3 to n do
        F_n := F_nm1 + F_nm2;
        F_nm2 := F_nm1;
        F_nm1 := F_n;
    endfor
    return F_n;
endif
```

# Quanto costa?

- Anche qui, contiamo il numero di righe di codice eseguite

```
algoritmo Fibonacci4(int n) → int
if ( n==1 || n==2 ) then
    return 1;
else
    F_nm1 := 1;   // ..............  1 volta
    F_nm2 := 1;   // ..............  1 volta
    for i:=3 to n do // ...........  (n-1) volte
        F_n := F_nm1 + F_nm2;   // .  (n-2) volte
        F_nm2 := F_nm1;  // ........  (n-2) volte
        F_nm1 := F_n; // ...........  (n-2) volte
    endfor
    return F_n;   // ..............  1 volta
endif

                  // Totale.........  4n-4
```

- Tempo proporzionale a n
- Spazio costante

# Ora siamo a posto... o no?

- Consideriamo la matrice *A* definita come segue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Teorema: Per ogni $n \geq 2$, si ha:

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix}$$

(Si dimostra per induzione)

# Algoritmo Fibonacci6

- Sfruttiamo il teorema precedente per descrivere l'algoritmo Fibonacci6 come segue

```
algoritmo Fibonacci6(int n) : int
    A = ( 1  1 )
        ( 1  0 )
    M = MatPow( A, n-1 );
    return M[1][1];
```

M[1][1] è il primo elemento della prima riga

# Algoritmo MatPow

- Per calcolare la potenza di una matrice, sfruttiamo il fatto che, se *k* è pari, $A^k = (A^{k/2})^2$

```
algoritmo MatPow(Matrice A, int k) → Matrice
if ( k==0 ) then
    M = ⎛1  0⎞
        ⎝0  1⎠
else
    if ( k è pari ) then
        tmp := MatPow(A,k/2)
        M := tmp '*' tmp;
    else
        tmp := MatPow(A,(k-1)/2);
        M := tmp '*' tmp '*' A;
    endif
endif
return M;
```

L'operatore '*' effettua il prodotto di matrici

# Riassunto

Tempo Esponenziale

Tempo Logaritmico

| Algoritmo | *Tempo* | *Memoria* |
|---|---|---|
| Fibonacci2 | $\Omega(2^{n/2})$ | $O(n)$ |
| Fibonacci3 | $O(n)$ | $O(n)$ |
| Fibonacci4 | $O(n)$ | $O(1)$ |
| Fibonacc6 | $O(\log n)$ | $O(\log n)$ |

# Cosa abbiamo imparato?

- Per lo stesso problema, siamo partiti da un algoritmo inefficiente (costo esponenziale) per arrivare ad un algoritmo molto efficiente (costo logaritmico)
- La scelta dell'algoritmo più appropriato fa la differenza tra poter risolvere un problema e NON poterlo risolvere

# Esercizio “di riscaldamento”

- È dato un array A[1..n-1] contenente una permutazione degli interi da 1 a n (estremi inclusi) a cui è stato tolto un elemento; i valori in A possono comparire in un ordine qualsiasi
  - Es: A = [1, 3, 4, 5] è una permutazione di 1..5 a cui è stato tolto il numero 2
  - Es: A = [7, 1, 3, 5, 4, 2] è una permutazione di 1..7 a cui \`e stato tolto il numero 6
- Scrivere un elemento che dato l'array A[1..n-1], individua il valore nell'intervallo 1..n che non compare in A.