Sulla deduzione e la teoria degli insiemi

Claudio Sacerdoti Coen
http://www.cs.unibo.it/~sacerdot

Chi sono e cosa faccio?

- Ricercatore presso il Dipartimento di Scienze dell'Informazione
- Docente del corso di “Logica per Informatica”
- Ricerca: logica e dimostrazione assistita
  - Quando una proposizione è vera? MAL POSTO!!
  - Tutto ciò che è dimostrabile è “vero”? SÍ
  - Tutto ciò che è vero è dimostrabile? NO!!
  - Data P, posso sempre dimostrare P oppure non P? NO!!
  - Posso scrivere un programma che in un tempo finito dimostri P o deduca che non si può dimostrare? NO!!
  - Posso scrivere un programma che verifichi una dimostrazione fatta da un utente? SI!!!
    (esempi: la dimostrazione che una centrale nucleare/software di controllo del volo sia corretto)

Dedurre

Alcune interessanti scoperte genetiche sui moscerini:

- i moscerini con una mutazione del gene X sono sempre albini;
- i moscerini non albini non hanno alcuna mutazione del gene Y, oppure hanno una mutazione sia del geneY che del gene Z.

Dite quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera:

a) se un moscerino è albino, ha una mutazione del gene X;
b) se un moscerino non ha una mutazione né nel gene Y né nel gene Z, allora è albino;
c) se un moscerino ha una mutazione nel gene Y ma non nel gene Z, allora è albino;
d) non esistono moscerini albini.

Dedurre: la Logica del prim'ordine

Una sentenza o proposizione è una frase alla quale possiamo associare un valore di verità

esempio: “Mario è biondo”
controesempio: “guarda Mario!”

La Logica del prim'ordine studia le sentenze della seguente forma

P(t1,...,tn)	esempio: “4! è multiplo di 3” => multiplo(4!,3)
S1 e S2	dove S1 e S2 sono sentenze
S1 o S2	“ “ “ “ “ “
se S1 allora S2	“ “ “ “ “ “
non S	dove S è una sentenza
[per ogni x,] S	dove S è una sentenza
esiste x per cui S	dove S è una sentenza

Dedurre: la logica del Prim'ordine

Attenzione alle variazioni linguistiche logicamente irrilevanti. Esempi:

- S1 ma non S2 S1 e non S2
- S1 se/quando S2 se S1 allora S2
- né S1 né S2 non S1 e non S2
- per ogni C D per ogni x, se C(x) allora D(x)
- per qualche C D esiste x, C(x) e D(x)

Altre variazioni linguistiche non sono esprimibili in logica del prim'ordine. Esempi:

- poichè S1 allora S2
- per molti X, S1

Dedurre: la Logica del prim'ordine

Caso particolare della logica del prim'ordine:

al posto di P(t1,....,tn) consideriamo solamente P(x)

esempio: “x è un numero dispari” => dispari(x)
controesempio: “2*x è un numero pari”
controesempio: “x è multiplo di y”

Dedurre: la Logica del prim'ordine

Nel caso particolare tutte le sentenze si possono rappresentare tramite diagrammi di Venn (fissato un insieme universo):

P(x)	insieme P
S1 e S2	intersezione di S1 e S2
S1 o S2	unione di S1 e S2
non S	complemento di S
se S1 allora S2	complemento di S1 unione S2
esiste x per cui S	S è non vuoto
per ogni x, S	S è l'universo (contiene tutto)

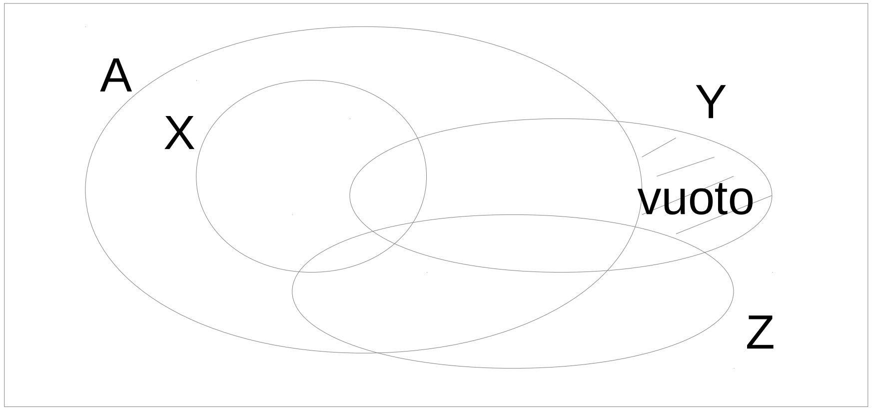
CASO PARTICOLARE (al posto delle regole blu):

per ogni x, se S1 allora S2 S1 sottoinsieme di S2

Dedurre

Alcune interessanti scoperte genetiche sui moscerini:

- i moscerini con una mutazione del gene X sono sempre albini
  per ogni x, se X(x) allora A(x)
  $X \subseteq A$
- i moscerini non albini non hanno alcuna mutazione del gene Y, oppure hanno una mutazione sia del geneY che del gene Z.
  per ogni x, se non A(x) allora (non Y(x) o (Y(x) e Z(x))
  $-A \subseteq (-Y \cup Y \cap Z)$



moscerini

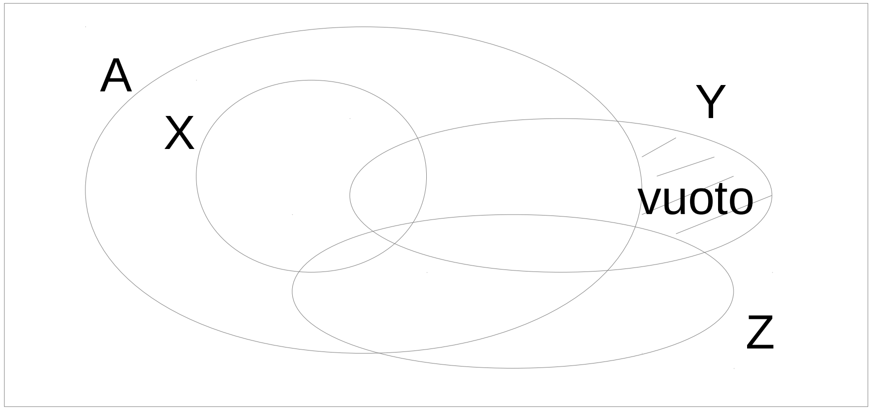
Dedurre

a) se un moscerino è albino, ha una mutazione del gene X
per ogni x, se A(x) allora X(x) $A \subseteq X$ INDETERMINATO

b) se un moscerino non ha una mutazione né nel gene Y né nel gene Z, allora è albino;
per ogni x, se (-Y(x) e -Z(x)) allora A(x) $-Y \cap -Z \subseteq A$ INDETERMINATO

c) se un moscerino ha una mutazione nel gene Y ma non nel gene Z, allora è albino;
per ogni x, se (Y(x) e -Z(x)) allora A(x) $Y \cap -Z \subseteq A$ VERO

d) non esistono moscerini albini
non esiste x, A(x) non è vero che A non vuoto INDETERMINATO



moscerini

Dedurre: conseguenza logica

Dato un insieme di ipotesi (o assunzioni, assiomi, postulati) e data una tesi (o conclusione) è possibile che

- la tesi sia una conseguenza logica delle ipotesi, ovvero sia sempre vera quando le ipotesi lo sono

  Esempio:
  ipotesi: ogni uomo è mortale; io sono un uomo
  tesi: io sono mortale

- la tesi sia contraddittoria con le ipotesi, ovvero sia sempre falsa quando le ipotesi sono vere

  Esempio:
  ipotesi: ogni uomo è mortale; io sono immortale
  tesi: io sono un uomo

- la tesi sia non determinata dalle ipotesi, ovvero possa essere sia vera che falsa quando le ipotesi sono vere

  Esempio:
  ipotesi: ogni uomo è mortale; io sono un uomo
  tesi: io sono biondo

Dedurre: conseguenza logica

Nota: le domande poste alle Olimpiadi erroneamente NON tengono conto del fenomeno della non determinatezza.

Le risposte attese sono pertanto

VERA per conseguenza logica
FALSA per contradditorietà
VERA oppure FALSA
per indeterminatezza, a seconda dell'esercizio!!! Sembra prevalere l'ipotesi implicita che nessun insieme sia vuoto o sia l'universo

Dedurre

Se tutti i belli sono ricchi e tutti i ricchi sono tristi, quale fra le seguenti frasi è corretta?

a) alcuni tristi sono belli
b) tutti i ricchi sono belli
c) alcuni belli non sono tristi
d) nessuna delle precedenti

Dedurre

Se tutti i belli sono ricchi

per ogni x, se B(x) allora R(x) $B \subseteq R$

e tutti i ricchi sono tristi,

per ogni x, se R(x) allora T(x) $R \subseteq T$

quale fra le seguenti frasi è corretta?

a) alcuni tristi sono belli

esiste x per cui (T(x) e B(x)) $T \cap B \neq \emptyset$ INDETERMINATO

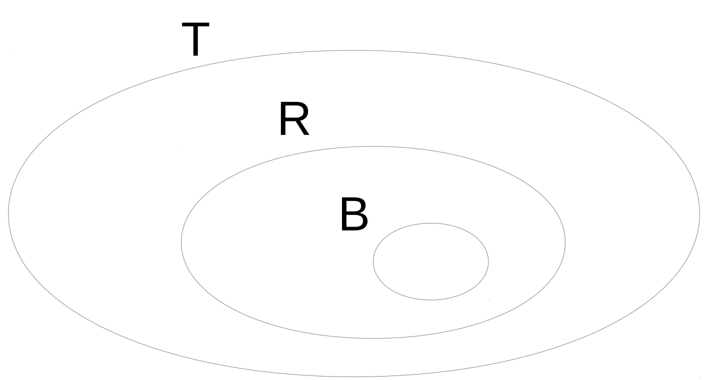
b) tutti i ricchi sono belli

per ogni x, se R(x) allora B(x) $R \subseteq B$ INDETERMINATO

c) alcuni belli non sono tristi

esiste x per cui (B(x) e non T(x)) $B \cap -T \neq \emptyset$ FALSO

d) nessuna delle precedenti



Insiemi e loro cardinalità

Bruno è una persona prudente, ha trascorso l'intero mese di settembre in montagna ma ha fatto escursioni solo 12 giorni, ogni volta che il tempo era perfetto, cioè nè pioveva nè era molto freddo! Al ritorno racconta che nel 50% delle giornate ha piovuto e nel 40% faceva molto freddo. Quanti giorni ha contemporaneamente fatto freddo e ha piovuto?

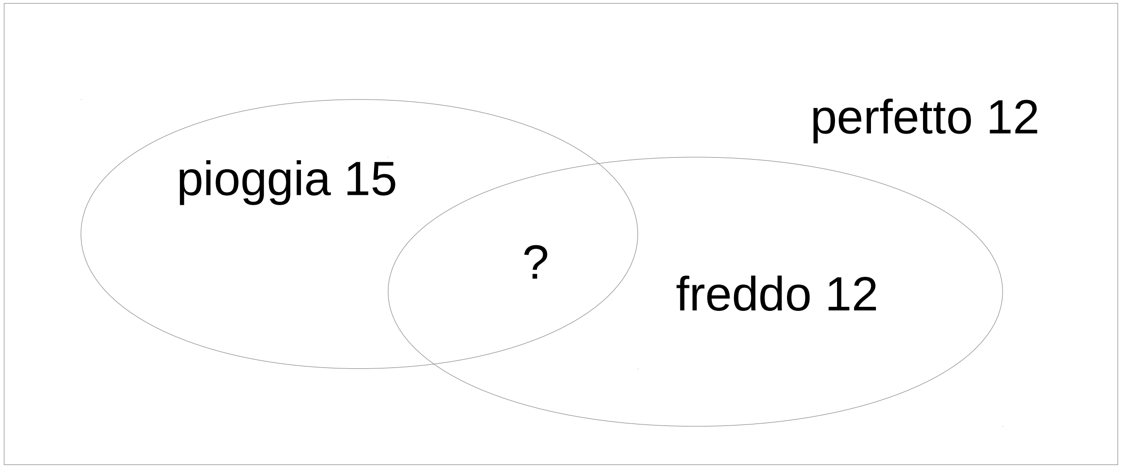
Insiemi e loro cardinalità

settembre = 30 giorni,
15 (50%) pioggia, 12 (40%) freddo,
12 nè pioggia nè freddo (= perfetto)

#(pioggia ∪ freddo) = #settembre - #perfetto = 18

#(pioggia ∪ freddo) = #pioggia + #freddo - #(pioggia ∩ freddo)

18 = 15 + 12 - #(pioggia ∩ freddo)



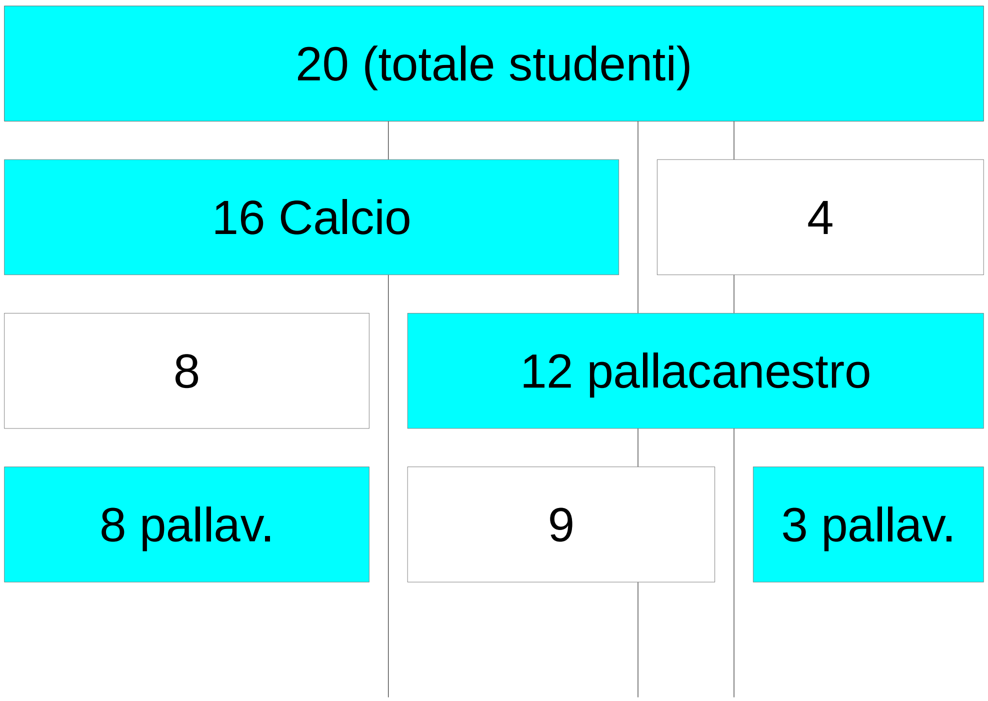
settembre (30)

Insiemi e loro cardinalità

In una classe ci sono 20 alunni, di cui 16 giocano a calcio, 12 a pallacanestro e 11 a pallavolo (NB: è possibile che qualche alunno giochi a più sport). Quanti sono <u>al minimo</u> coloro che praticano tutti e tre gli sport?

Insiemi e loro cardinalità

Qui la parola chiave è “al minimo”. Cerchiamo di distribuire gli studenti agli sport in modo da minimizzare le sovrapposizioni di tutti e tre.

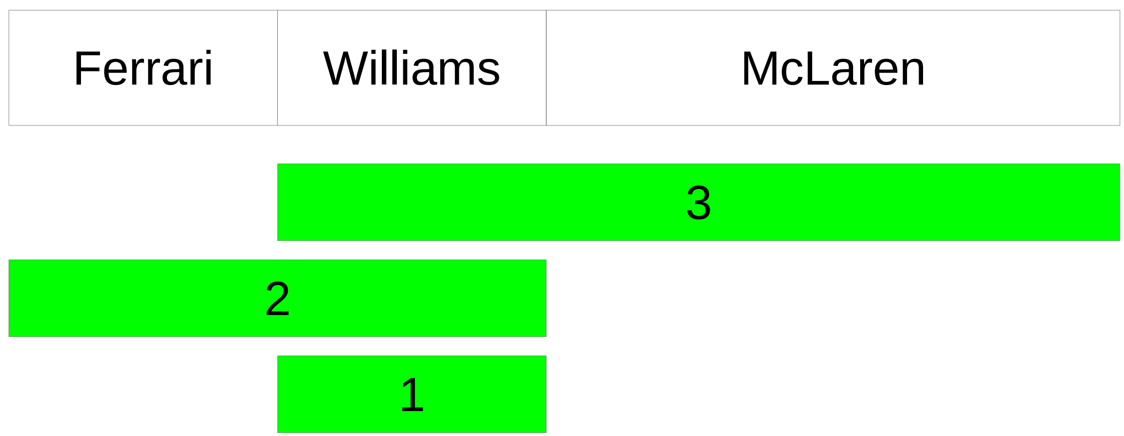


Insiemi e loro cardinalità

Quanti modelli di macchine di Formula 1 ha Mario se sono tutte Ferrari meno tre, sono tutte McLaren meno due ed ha anche una Williams? (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Insiemi e loro cardinalità

Quanti modelli di macchine di Formula 1 ha Mario se sono tutte Ferrari meno tre, sono tutte McLaren meno due ed ha anche una Williams? (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

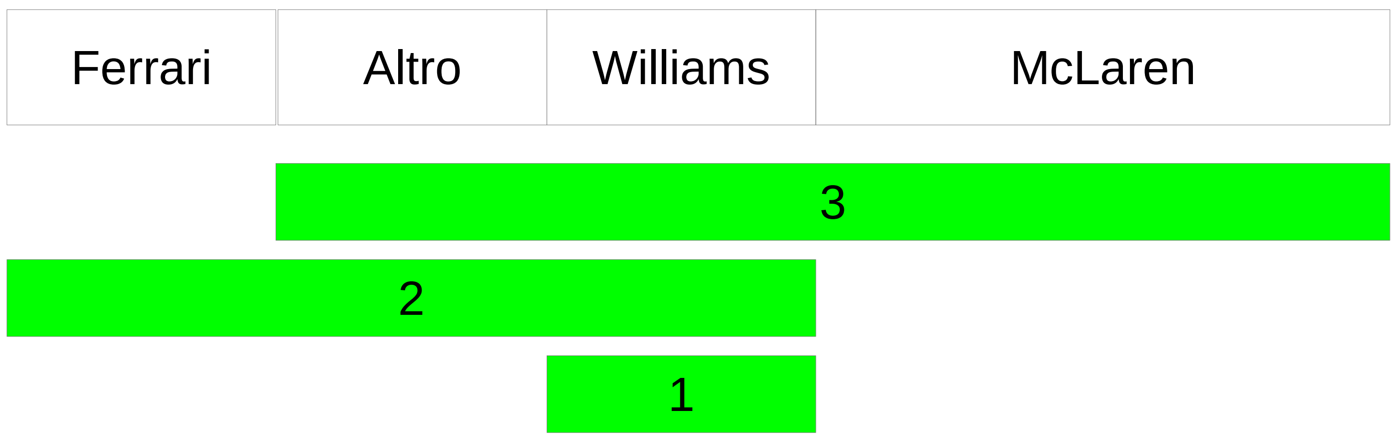


4 di cui 1 Ferrari, 1 Williams e 2 McLaren

IPOTESI IMPLICITA: non ci sono altri modelli! Ma serve?

Insiemi e loro cardinalità

Quanti modelli di macchine di Formula 1 ha Mario se sono tutte Ferrari meno tre, sono tutte McLaren meno due ed ha anche una Williams? (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6



$F = N - 3 \geq 0$

$M = N - 2 \geq 0$

$A \geq 0$

$N = 1 + F + M + A \geq 0$

da cui $N = 4 - A \geq 3$ da cui

$A=0$, $N=4$

oppure

$A=1$, $N=3$

Cosa calcola?

```
int funzione() {
    int contatore = 0;
    int sum  = 0;
    while(contatore <= 4) {
        contatore = contatore + 1;
        sum = sum + contatore;
    }
    return sum;
}
```

Cosa calcola?

```
int funzione() {
    int contatore = 0;
    int sum  = 0;
    while(contatore <= 4) {
        contatore = contatore + 1;
        sum = sum + contatore;
    }
    return sum;
}
```

contatore	sum
0	0
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15

Cosa calcola?

```
int F(int n, int x)
{
   if ( n<=0 )
      return e;
   else
      return G(x,F(n-1,H(x)));
}
```

```
int e = 1;

int H(int x)
{ return x; }

int G(int x, int y)
{ return x*y; }
```

```
int e = 0;

int H(int x)
{ return x; }

int G(int x, int y)
{ return x+y; }
```

```
int e = 1;

int H(int x)
{ return x-1; }

int G(int x, …)
{ return x*y; }
```

Cosa calcola?

```
int F(int n, int x)
{
   if ( n<=0 )
      return e;
   else
      return G(x,F(n-1,H(x)));
}
```

```
int e = 1;

int H(int x)
{ return x; }

int G(int x, int y)
{ return x*y; }
```

x^n per n≥0, 1 altr.

```
int e = 0;

int H(int x)
{ return x; }

int G(int x, int y)
{ return x+y; }
```

x*n per n≥0, 0 altr.

```
int e = 1;

int H(int x)
{ return x-1; }

int G(int x, …)
{ return x*y; }
```

n! per x=n≥0