Metodi numerici per il calcolo di equazioni differenziali

Metodo di Eulero

In alcune applicazioni pratiche, puo' risultare molto difficile o addirittura impossibile, calcolare l'integrale particolare di una equazione differenziale, mediante i procedimenti dell'analisi classica. In questi casi, è possibile determinare una soluzione attraverso lo studio dell'**analisi numerica**.

L'analisi numerica dispone di numerosi metodi che permettono di risolvere questo problema: il piu' semplice e' il **metodo di Eulero** che puo' essere applicato alle ***equazioni differenziali del primo ordine scritte in forma normale***.

$$y' = f(x,y)$$

Il metodo di Eulero:

- fornisce risultati approssimati, cosi' come ogni metodo numerico;
- e' di semplice comprensione;
- e' facilmente programmabile.

La sua convergenza e' però molto lenta ed e' spesso necessario fare molti calcoli per ottenere una accettabile approssimazione del valore cercato.

Per poter comprendere questo metodo e' bene richiamare due nozioni teoriche: una sulle equazioni differenziali del primo ordine ed una sull'equazione del fascio di rette:

- ✓ Data **y'=f(x,y)**, $f(x_0, y_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in $P(x_0, y_0)$ alla **curva integrale y** (soluzione particolare dell'equazione differenziale).

- ✓ Fissato $P(x_0,y_0)$, la retta di coefficiente angolare m, passante per il punto $P(x_0,y_0)$, ha equazione:

$y-y_0 = m(x-x_0)$ da cui $y = m(x-x_0) + y_0$

Il metodo di Eulero vuole sostituire alla curva integrale reale, che non si puo' determinare, una sua approssimazione formata da segmenti di rette tangenti a tale curva.

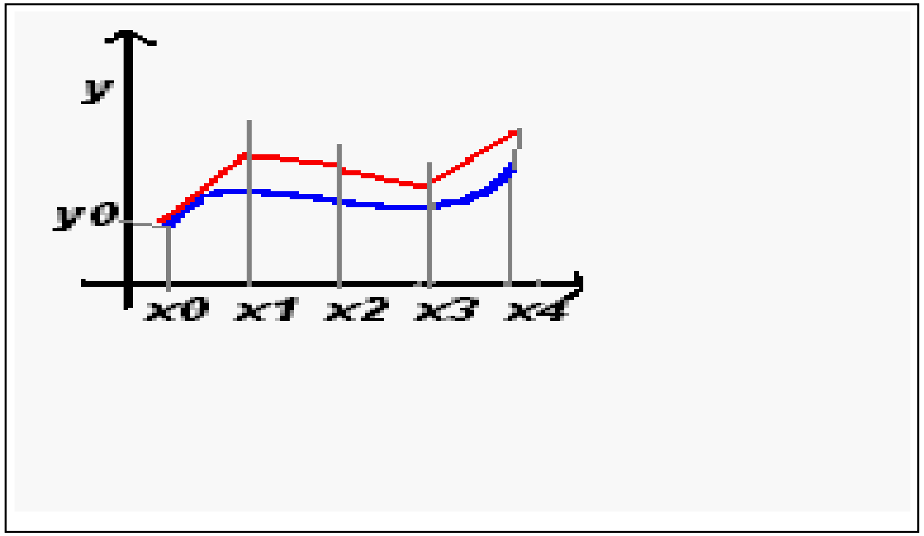
Studio del problema

*Data l'equazione differenziale **$y' = f(x,y)$**, e la condizione iniziale **$y(x_0) = y_0$**, determinare il valore che assume la curva integrale (integrale particolare) nel punto **$x = c$**.*

- Si considera l'intervallo $[x_0 ; c]$ e si divide in **n** parti uguali, ciascuna delle quali avra' ampiezza:

$$h = \frac{|c - x_0|}{n}$$

- In ogni intervallo $[x_i;x_{i+1}]$, di ampiezza h, si sostituisce all'integrale particolare cercato la sua tangente, o meglio il segmento di retta tangente nel punto (x_i , y_i) alla curva integrale che passa in quel punto:



NB: La curva in blu e' l'integrale particolare che risolve il problema (soluzione dell'equazione differenziale), la spezzata in rosso e' la sua approssimazione con il metodo di Eulero

Algoritmo iterativo

Si considera il primo intervallino $[x_0 ; x_1]$

- Si scrive l'equazione della retta tangente alla curva integrale, che avra' coefficiente angolare $m_0 = f(x_0;y_0)$, passante per $(x_0;y_0)$:

  $y = f(x_0;y_0)(x-x_0)+y_0$

- Noto $x_1 = x_0+h$, si determina y1:

  $$\mathbf{y_1 = f(x_0;y_0)\, h + y_0}$$

Si considera il secondo intervallino $[x_1; x_2]$:

- si ripetono le considerazioni appena viste e si determina:

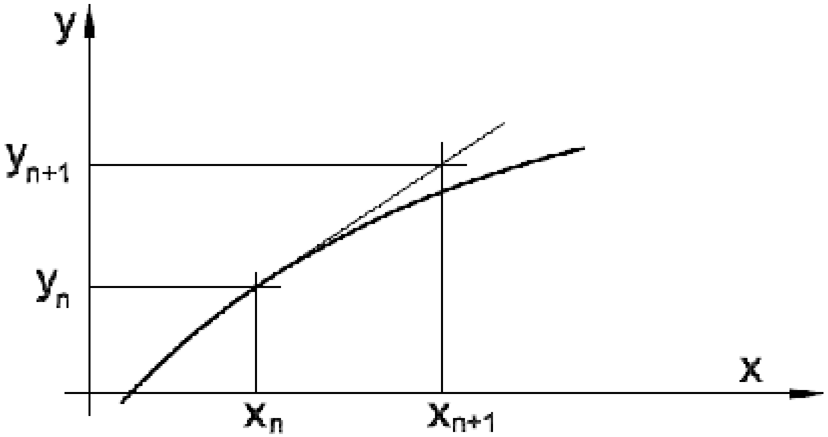
  $$\mathbf{y_2 = f(x_1;y_1)\, h + y_1}$$

....

....

Si considera il generico intervallo $[x_n; x_{n+1}]$ ed iterando il procedimento descritto si ottiene:

$$y_{n+1} = f(x_n;y_n)\,h + y_n$$



Esempio:

Data l'equazione differenziale del primo ordine:

$y' = f(x,y) = x^2 - 3x + 1$ *con la condizione iniziale* $y(0) = 0$

stimare il valore della curva integrale nel punto $x=2$, con $n = 10$ (numero di iterazioni).

Si calcola dapprima l'ampiezza di ciascun intervallino: $h = (2-0)/10 = 0,2$

Si procede poi alle varie iterazioni:

- Prima iterazione (n=0): $x_0 = 0$ $y_0 = 0$ $m_0=f(0;0)=1$

$y_1 = 1*(0,2)+0 = 0,2$ $(\ y_{n+1} = f(x_n;y_n)\ h + y_n\ )$

- Seconda iterazione (n=1): $x_1 = 0+0,2 = 0,2$ $y_1 = 0,2$ $m_1=f(0,2;0,2)=0,44$

$y_2 = 0,44*(0,2)+0,2 = 0,288$

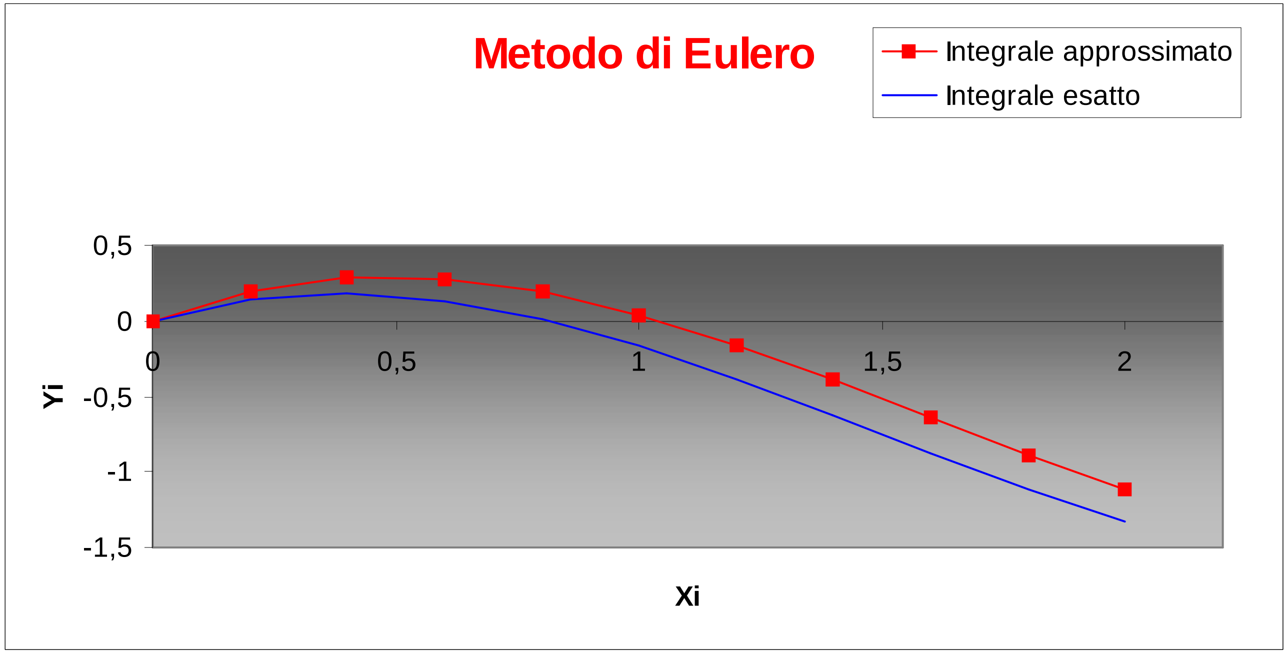
- Terza iterazione (n=2): $x_2 = 0,2+0,2 = 0,4$ $y_2 = 0,288$ $m_2=f(0,4;0,288)=-0,04$

$y_3 = -0,04*(0,2)+0,288 = 0,208$

……………

Si ottiene la seguente tabella e relativi andamenti:

i	x_i	y_i	$f(x_i,y_i)$
0	0	0	1
1	0,2	0,2	0,44
2	0,4	0,288	-0,04
3	0,6	0,28	-0,44
4	0,8	0,192	-0,76
5	1	0,04	-1
6	1,2	-0,16	-1,16
7	1,4	-0,39	-1,24
8	1,6	-0,64	-1,24
9	1,8	-0,89	-1,16
10	**2**	**-1,12**	-1



<u>Valore sperimentale</u>: ottenuto col metodo di Eulero in x=2 è ***y = -1,12***.

<u>Valore corretto</u>: l'integrale generale dell'equazione differenziale data è: $y = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x + c$

imponendo la c.i. si ottiene l'integrale particolare: $y = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x$ da cui ***y(2)= -1,33***

Esercizio:

Data l'equazione differenziale del primo ordine:

$y' = f(x,y) = (1/2)x^3 - (1/2)x + 1$ *con la condizione iniziale* $y(0) = 1$

stimare, tramite l'utilizzo del foglio elettronico, il valore della curva integrale nel punto $x=4$, con $n = 10, 20, 50, 100$ (realizzare 4 fogli, uno per ciascun valore di n).
Graficare su un piano cartesiano la curva integrale e le 4 approssimazioni ottenute.