Sei lezioni sulla *Conseguenza Logica*
Dag Prawitz, Lezione 6

marzo 2007

Rivediamo alcuni tipi di *ground*

δ è un *ground* per

$A \wedge B$ sse $\delta = \wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$ dove α è un *ground* per A e β è un *ground* per B;

$A \vee B$ sse $\delta = \vee I_1(\alpha; A/A \vee B)$ dove α è un *ground* per A oppure $\delta = \vee I_2(\beta; B/A \vee B)$ dove β è un *ground* per B;

$\exists x A(x)$ sse $\delta = \exists I(\alpha; A(t)/\exists x A(x))$ dove α è un *ground* per $A(t)$

$A \to B$ sse $\delta = \to I\xi(\alpha(\xi); B/A \to B)$ dove $\alpha(\xi)$ è un *ground* non saturo per B sotto l'assunzione A. Qui la variabile ξ è vincolata.

$\neg A$ sse $\delta = \to I\xi A(\beta(\xi, A); \perp /\neg A)$, dove $\beta(\xi)$ è un *ground* non saturo per $\perp$ sotto l'assunzione A.

$\forall x A(x)$ sse $\delta = \forall I x(\alpha(x); A(x)/\forall x A(x))$ dove $\alpha(x)$ è un *ground* non saturo per la formula aperta $A(x)$.

Commenti.

- Nel caso della disgiunzione e dell'esistenziale ci possono essere molti *ground* per una stessa proposizione. Una proposizione può avere molti *ground*, ma d'altra parte un *ground* è *ground* per al massimo una proposizione.

  Se α è *ground* per A, allora α non è un *ground* per $A \vee B$, dobbiamo applicare l'oprazione $\vee I$ ad α, $\vee I_1(\alpha; A/A \vee B)$ è un *ground* for $A \vee B$.

- Nel caso dell'assurdo, poichè non ci può essere tale *ground* per l'assurdo, ogniqualvolta colmiamo questo *ground* non saturo con un *ground* saturo per A, il risultato è un *ground* saturo per l'assurdo, ma abbiamo già definito cosa sia una *ground* saturo per l'assurdo, dicendo che non ce n'è alcuno. Quindi non possiamo mai ottenere un *ground* saturo per l'assurdo. In altre parole se c'è un *ground* per $\neg A$ allora non ci sono *ground* per A.

- Il motivo per cui riscriviamo sempre le premesse e la conclusione dell'inferenza in questione è che vogliamo tenere nota, per esempio nel caso dell'esistenziale, di quale istanza α è *ground*. Se non avessi questa informazione scritta in questo modo, allora dovrei scrivere $\exists I(\alpha; A, t/\exists x A(x))$ e quindi considerare una operazione con due argomenti. E' una sorta di dichiarazione del *tipo* degli argomenti coinvolti.

δ è un *ground* per $A \rightarrow B$ sse $\delta = \rightarrow I\xi A(\beta(\xi, A); B/A \rightarrow B)$ dove $\beta(\xi)$ è un *ground* non saturo per B, sotto l'assunzione A.

- Cosa sia un *ground* per una proposizione del linguaggio del primo ordine procede per recursione e rispetta il principio di composizionalità

- Abbiamo ampliato la nozione di inferenza. Una inferenza in generale

$$\begin{array}{c}\alpha \\ \dfrac{A}{B}\,\phi\end{array}$$

  è data da premesse, conclusioni, *ground*, ma anche *ground* non saturi. Ad esempio

$$\begin{array}{c}\alpha(\xi) \quad \beta(\nu) \\ \dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\phi\end{array}$$

  dove $\phi = \wedge I(\alpha(\xi), \beta(\nu); A, B/A \wedge B)$ dove $\alpha(\xi)$ è un *ground* non saturo per A e $\beta(\nu)$ è un *ground* non saturo per B;

- benché la nostra specificazione di cosa sia un *ground* avvenga per recursione, tuttavia non è decidibile. Una dimostrazione formale è decidibile, possiamo sempre decidere se qualcosa è una dimostrazione formale o no, ma un *ground* non è ricorsivo e questo dipende da cosa è un *ground* per l'implicazione (analogamente per il quantificatore universale). Se qualcosa è un *ground* per una implicazione dobbiamo sapere se qualcosa è o meno un *ground* non saturo, ma questo non è qualcosa che possiamo sempre decidere.

  Se il linguaggio consiste solo di $\wedge, \vee, \exists$, allora un *ground* è costruito a partire dalle operazioni $\wedge I, \vee I, \exists I$ e possiamo sempre controllare se queste valgono o meno.

- è desiderabile avere una nozione di *ground* non decidibile? E' importante che non sia decidibile, perché supponiamo che la rendiamo decidibile in qualche modo, e questo lo potremmo fare per esempio dicendo che in $\rightarrow I\xi(\beta(\xi); B/A \rightarrow B)$, $\beta(\xi)$ non fa riferimento ad ogni *ground* non saturo, ma solo a quelli costruiti in qualche modo specificato attraverso certe operazioni. Ma il teorema di incompletezza di Gödel ci dice che aggiugendo più operazioni saremmo in grado di ottenere più *ground* così se restringiamo questa nozione di *ground* non saturo potremmo trovarci nella situazione in cui non c'è alcun *ground* per la proposizione di G di Gödel benché intuitivamente possiamo dare un *ground* per G (aggiungendo più operazioni). Allora la nozione di *ground* sarebbe insoddisafcente perché intuitivamente uno direbbe che G è vera ed ha un *ground* da un punto di vista intuitivo, ma non ha alcun *ground* secondo questa definizione. Così non specificando niente in $\beta(\xi)$, può darsi che questo *ground* non saturo sia determinato da operazioni di cui ancora non abbiamo neppure un'idea, che saranno scoperte in futuro, o mai. $\beta(\xi)$ è di solito costruito come combinazione di certe operazioni, ma quale operazione usiamo per costruire questo *ground* non saturo, questo è lasciato completamente aperto.

- Questo determina una distinzione netta tra *ground* e dimostrazione formale. Ancora è importante che sia così proprio a causa del fenomeno dell'incompletezza. Se cerchiamo di specificarlo in termini di qualcosa di decidibile, allora sappiamo che otterremo una nozione troppo debole che non può corrispondere alla nostra idea intuitiva di *ground.* E la critica di Tarski all'uso delle deduzioni formali per spiegare la conseguenza logica è proprio questa: non funziona a causa del teorema di incompletezza di Gödel ed in sostanza ha ragione.

- Quando specifichiamo cosa sia un *ground* per una proposizione, le condizioni possono essere più o meno liberali per esempio sono più liberali per proposizioni della forma $A \vee B$ che della forma $A \wedge B$. Ci sono poi due estremi, un estremo si ha quando si introduce una costante per il vero, $\top$, allora tutto può essere un *ground* per $\top$:

  δ è un *ground* per $\top$ sse $\delta = \top I(\quad ; \quad /\top)$

  all'altro estremo c'è l'assurdo, $\perp$, dove si richiede troppo, a tal punto che non c'è alcun *ground* per l'assurdo.

- Abbiamo definito la nozione di *ground* per una propozione A in modo ricorsivo ed ovviamente ci deve essere una base per questa recursione, quando arriviamo alle formule atomiche, $P(t_1, \ldots, t_n)$. Non ho detto ancora cosa intendo per *ground* per le proposizioni atomiche, anche se abbiamo detto qualcosa sulle proposizioni osservative. Cosa può essere un *ground* per $t = u$? Un modo di vedere la cosa è dire che otteniamo un *ground* per $t = u$, esaminando i due termini e se risultano essere lo stesso, allora abbiamo un *ground* per $t = u$.

  δ è un *ground* per $t = u$ sse $\delta = = I(; /t = u)$ purché i termini $\underline{t}$ e $\underline{u}$ siano gli stessi.

  Le regole per l'identità in deduzione naturale sono

  $$\frac{}{t = u} = I \qquad\qquad \frac{A(t) \quad t = u}{A(u)} = E$$

  Questo è tutto ciò che c'è da dire sull'identità nell'aritmetica di Peano. Con questa definizione molto semplice di *ground* per $t = u$, la regola $= E$ deve risultare valida.

0.0.1 Validità delle regole di inferenza della deduzione naturale

Ora voglio mostrare che tutte le inferenze in deduzione naturale risultano essere forme inferenziali valide sulla base della definizione da me data. Data una inferenza del tipo,

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

per mostrare che è valida, dobbiamo specificare una operazione ϕ tale che

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B} \phi$$

diventa una forma inferenziale - nel mio senso - valida. Questo è il programma. Le regole di inferenza in deduzione naturale sono di due tipi, introduzione ed eliminazione: Per quanto riguarda le regole di introduzione, questo è banale. L'inferenza

$$\frac{A, B}{A \wedge B}$$

è valida perché abbiamo una operazione $\wedge I$ che la rende una forma inferenziale

$$\frac{A, B}{A \wedge B} \wedge I$$

valida. Il requisito è che dati due *ground* α e β per A e B, siamo in grado di mostrare che il risultato dell'applicazione dell'operazione $\wedge I$ ad α e β, $\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$, è un *ground* per la congiunzione $A \wedge B$.
Ma un *ground* per $A \wedge B$ era stato definito essere di questa forma

$\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$
dove α e β sono *grond* per A e B, e questo è ciò che già abbiamo.
Il significato di una congiunzione è inteso essere come ciò che conta come *ground* per l'introduzione della congiunzione, allora la regola di introduzione della congiunzione è banalmente valida.

Le altre regole di introduzione sono ugualmente banali. I casi interessanti sono le regole di eliminazione.

La regola di eliminazione della congiunzione è di due tipi

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1 \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E_2$$

Questa è una inferenza valida perché posso definire un'operazione, che chiamerò $\vee E_1$, che la rende questa forma inferenziale valida. Qual è questa operazione? la posso definire cosí: $\wedge E_1(\xi; A \wedge B/A)$
La possiamo definire solo per casi speciali. Assumiamo che la forma inferenziale è del tipo $\wedge E_1(\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B); A \wedge B/A)$ ed ora io so cosa è questo perché

$\wedge E_1(\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B); A \wedge B/A) = \alpha$

$\star\star\star$

Una definizione più generale potrebbe essere che

$\wedge E_1(\alpha; A \wedge B/A)) = \ldots\ldots$

E' molto simile all'idea che se uno definisce la moltiplicazione $n \times m = \ldots$ non si dà la definizione gnerale, ma si dà la definizione per casi, $n \times (m+1) = n \times m + n$. E' definita contestualmente, per così dire.

Ora dobbiamo mostrare che

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E_1$$

è valida.

Abbiamo γ che è un *ground* per $A \wedge B$, dobbiamo mostrare che applicando $\wedge E_1$ a γ si ottiene un *ground* per A, ovvero che $\wedge E_1(\gamma; A \wedge B/A)$ è un *ground* per A.

Cosa significa che γ è un *ground* per $A \wedge B$? dato il significato della congiunzione, γ deve avere la forma seguente:

$\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$ ove α, β sono *ground* per A e B. Quindi otteniamo:

$\wedge E_1(\wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B); A \wedge B/A)$

Ora devo mostrare che questo è un *ground* per A. A questo punto posso applicare la definizione di eliminazione della congiunzione, ma questa è la stessa cosa di α che già avevo come *ground* per A.

Quindi per stabilire che è valida facciamo due cose: cosideriamo cosa significa la congiunzione, ed applichiamo l'operazione $\wedge E_1$ sulla base della sua definizione.

Ricorda ora le regole di conversione usate per trasformare una deduzione in forma normale sono simili in struttura a ciò che facciamo qui, prendiamo una componente.

Consideriamo ora la regola:

$$\frac{A \to B, \quad A}{B} \to E$$

Dati i ground γ ed α per $A \to B$ ed A mostra che $\to E(\gamma, \alpha; A \to B, A/B)$ è un ground per B.
$\gamma = \to I\xi(\beta(\xi); B/A)$ ove β è un *ground* non saturo per A

Prima definisco l'operazione di eliminazione della implicazione

$\rightarrow E(\rightarrow I\xi(\beta(\xi), \alpha; A \rightarrow B, A/B) = \beta(\alpha)$ e poi devo mostro che questa operazione rende valida la regola di eliminazione dell'implicazione. Da $\rightarrow E(\gamma, \alpha; A \rightarrow B, A/B)$, per sostituzione ottengo

$\rightarrow E(\rightarrow I\xi(\beta(\xi); B/A), \alpha; A \rightarrow B, A/B)$. Ora sappiamo che α è un *ground* per A, quindi colmando la lacuna $\rightarrow E(\rightarrow I\xi(\beta(\xi), \alpha; A \rightarrow B, A/B) = \beta(\alpha)$ otteniamo un *ground* per B.

Possiamo ora riflettere sul linguaggio usato per descrivere i *ground*. Tale linguaggio include le operazioni del tipo $\rightarrow E$, $\rightarrow I$, i termini, e le formule del primo ordine, variabili e tutto ci o che può essere costruito a partire da variabili con un indice ξ^A, costanti e operatori. Quindi possiamo parlare di dimostrazioni del primo ordine in un linguaggio più formale. Possiamo parlare di dimostrazioni aperte quando contengono variabili o di dimostrazioni chiuse. Ora questo è un linguaggio e deve essere interpretato nel modo che abbiamo seguito finora.

Una dimostrazione del primo ordine di A denota un *ground* per A e possiamo dire la stessa cosa per deduzione del primo ordine di A che denotano un un *ground* per A

Ora si può dimostarre il teorema di normalizzazione per la logica del primo ordine già seguendo i *ground*.

Una delle applicazioni importanti della normalizzazione. Supponi di avere una dimostrazione nella logica intuizionista di $A \vee B$ allora c'è una dimostrazione di A o di $B \vdash_I A \vee B$ allora $\vdash_I A$ oppure $\vdash_I B$.

Questo non è vero classicamente. Ora un modo di mostrare questo è, supponi di avere una dimostrazione di $A \vee B$. Bene, possiamo normalizzare questa dimostrazione ed una dimostrazione in forma normale termina sempre con una regola di introduzione:

$$\dfrac{\vdots}{A \vee B}\vee I$$

Dimostrare il teorema di normalizzazione non è facile perché le dimostrazioni divengono sempre più grandi nella logica del primo ordine e se si considera l'aritmetica di Peano, non funziona per niente in un modo combinatorio. Ora sappiamo che in seguito alla normalizzazione il sistema è consistente perché non si può derivare l'assurdo

$$\dfrac{\vdots}{\perp}$$

perché se ci fosse una dimostrazione dell'assurdo ci sarebbe una dimostrazione normale dell'assurdo e questa deve terminare con una regola di introduzione, ma non esiste alcuna regola di introduzione per $\perp$. Se questo fosse possibile per l'aritmetica, si dimostrerebbe la consistenza dell'aritmetica in modo finitario, combinatorio, e questo va contro il secondo teorema di Gödel.

Una volta introdotti questi *ground* questa è una cosa molto facile da mostrare. La consistenza segue immediatamente perché abbiamo detto che una dimostrazione ci dà un *ground* per la conclusione, ma visto che non ci sono *ground* per l'assurdo, l'assurdo non può essere derivato.