Sei lezioni sulla *Conseguenza Logica*
Dag Prawitz, Lezione 4

(Traduzione di Valentina Benedetti)

marzo 2007

Handout

Bologna, Lecture 4, March 2007 (meant as an aid to the lecture not intended to be self-contained)

INTRODUCTION TO A CONSTRUCTIVIST SEMANTICS

A. A basic problem. Let J be a valid inference from $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to B. Find a relation R that holds between a person and an inference J such that

1. if (a) P stands in the relation R to J, and (b) P has grounds for $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (is justified in holding them true), then (c) P has a ground for B (is justified in holding B true);
2. it is a reasonable account of how we normally gain knowledge by using inferences to say that we get in position 1(c) by first satisfying 1(a) and 1(b).

B. Some comments

1. It is a fact that we do gain knowledge by inferences. The problem is to say how that occurs, and we then need to specify a relation R such that conditions A1) and A2) are satisfied. This gives us at the same time a way to test a proposed definition of validity.
2. R cannot be empty; there are counterexamples to A1) for empty R.
3. Shapiro's proposal: To set $R =$ 'P sees that J is self-evidently valid' or 'P sees that B can be obtained from $A_1, A_2, \ldots, A_n$ by a chain of self-evidently valid (and gap-free) inferences'. Perhaps a good proposal, but what is it to be 'self-evidently valid'? Another proposal is to introduce a relation 'P recognizes the validity of J' that puts some not to heavy burden on P.
4. The stronger R is, the easier it is for a definition of validity to satisfy A.1. But if R is made too strong, A.2 will not be satisfied.
5. To equate R with 'P knows that the inference J is valid' is to make R too strong; condition I.2 is then not satisfied.

a) Etchemendy makes this equation, and claims that when validity is defined model-theoretically I.2 is not satisfied (although I.1 is);

b) I claim that the equation cannot be made for any reasonable notion of validity: no knowledge would ever be gained by inferences, if it had to occur by first getting grounds for the validity of the inference (i.e. by proving its validity). Arguments from Bernard Bolzano and Lewis Carroll.

C. A proposal 1. Basic idea. An inference is to be seen as an act in which we operate on the grounds given for the premisses in order to get a ground for the conclusion. To make an inference is to carry such an operation claiming that it yields a ground for the conclusion. The operation is applied to grounds given for the premisses, and when successful it yields as a result a ground for the conclusion. To give this idea any substance we must say more precisely what counts as a ground, and I suggest that in the end we must base this on the meaning of the sentence in question, or rather, that the meaning of a sentence is accounted for in terms what counts as ground for the sentence.

Siamo arrivati alla questione già posta ieri, quale tipo di relazione ci deve essere fra le premesse e la conclusione di un'inferenza in modo tale che si acquisisce conoscenza facendo uso dell'inferenza

Detto altrimenti, considera un'inferenza

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}\,\mathrm{J}$$

e supponiamo che sia valida, allora dobbiamo trovare una relazione R in modo tale che la seguente relazione valga:

Trovare una relazione R tale che: P

1. se $R(P, J)$ e P ha *ground* per $A_1, A_2, \ldots, A_n$, allora P ha *ground* per B
2. per arrivare a conoscere B attraverso inferenze, P deve ottenere *ground* per $A_1, A_2, \ldots, A_n$ per entrare nella relazione R con l'inferenza J.

Prima di tutto, se una persona P sta nella relazione R con l'inferenza, e la persona ha *ground* per le premesse (in altre parole se P è giustificato nel ritenere vere le premesse), allora deve avere *ground* anche per B (in altre parole la persona P è giustificata nel ritenere vera B).

Inoltre si potrebbe dire che la relazione R deve descrivere come noi normalmente otteniamo conoscenza usando inferenze. Cioè si dovrebbe trovare una relazione R tale da rispecchiare il fatto che normalmente il modo in cui otteniamo conoscenza attraverso inferenze, consiste nell'ottenere *ground* per le premesse, e quindi nel mettere la persona P in una qualche relazione R con l'inferenza.

La relazione R deve essere quindi tale da render ragionevole il fatto che il modo normale di ottenere conoscenza riguardo alla proposizione B attraverso inferenze (di arrivare a conoscere B, che B è vera), sia trovare alcune premesse per le quali si hanno *ground*, trovare B e un'inferenza da queste premesse alla conclusione (B), ed entrare in una relazione R con l'inferenza tale che si ottengano davvero *ground* per B .

La domanda che ci eravamo posti è come si arrivi a conoscere B : vogliamo una ragionevole descrizione di ciò. Ho quindi suggerito che tale descrizione abbia la forma seguente: si arriva a conoscere B ottenendo *ground* per alcune premesse ed entrando nella relazione R con l'inferenza J. Se ciò si verifica, allora abbiamo anche *ground* per B . Per il momento lasciatemi usare *ground* senza un'ulteriore definizione. Specificherò in seguito cosa le considero essere. Ma per adesso pensatele solo come 'essere giustificati nel ritenere qualcosa vero'. Sto parlando solo di '*ground* conclusive', sebbene sia importante ricordare che ce ne sono anche di non conclusive. Torniamo al nostro problema: in che modo otteniamo conoscenza attraverso inferenze? Penso che per descrivere ciò avremmo bisogno di specificare la relazione R, tale che le due condizioni (1 e 2) siano soddisfatte. Tali condizioni sono supposte essere idee intuitive riguardo alla validità delle inferenze e riguardo a come noi otteniamo conoscenza attraverso inferenze. Ma dovremmo certamente inserire qualcosa di specifico al posto di R, prima che questa sia una descrizione (o equivalga alla nostra idea intuitiva) di validità di inferenze e di come otteniamo conoscenza usando inferenze valide.

0.0.1 Test di adeguatezza

Se si trova un buon modo di descrivere la validità delle inferenze e di descrivere come otteniamo conoscenza attraverso inferenze, allora abbiamo anche una sorta di test per le proposte di definizione di validità: se qualcuno proponesse, ad esempio Bolzano-Tarski o chiunque altro, una definizione di validità delle inferenze, allora, se si considerano i requisiti (1 e 2) come descrizioni dell'idea intuitiva di come otteniamo conoscenza e della validità di inferenze, essi dovrebbero essere soddisfatti da tale definizione. Deve valere che se si ha un'inferenza J valida, e si ha una persona P che sta nella relazione R con l'inferenza J e ha *ground* per le premesse, allora la persona P deve ottenere davvero *ground* per la conclusione. Si può testare ogni definizione proposta di validità per vedere se ciò è veramente soddisfatto: una sorta di condizione di adeguatezza per le definizioni di validità. Come abbiamo visto ieri, la relazione R non può essere vuota. Essa deve avere una qualche sostanza. Se essa non richiedesse alcuna specificazione, se fosse sempre soddisfatta, cioè se qualunque persona potesse sempre essere messa in tale relazione R, allora quella che abbiamo formulato non sarebbe un'idea ragionevole di come otteniamo conoscenza attraverso inferenze e della validità. Ieri ho proposto un contro-esempio in proposito: se si prende una conclusione B lontana (remota) rispetto alle premesse, in modo che non si possa vedere immediatamente che segua da esse, allora certamente non sarebbe sufficiente avere *ground* per le premesse e sapere che l'inferenza è di fatto valida, per essere giustificati nel ritenere A vera. Quindi R deve avere una qualche sostanza, non può essere vuota. Dopo la lezione di ieri mi è stata sollevata una domanda: perchè dopo tutto la proposta di Shapiro riguardo alla conseguenza logica in senso deduttivo non è in un qualche modo una descrizione di questo uso epistemico delle inferenze? Del resto abbiamo detto che essere una conseguenza logica in senso deduttivo da alcune premesse è avere una deduzione, una catena di inferenze, della conclusione da tali premesse, usando solo inferenze auto-evidenti, gap-free. Si potrebbe dire che anche così si è spiegato in un qualche modo come otteniamo conoscenza. Quindi penso che questa forse sia una direzione ragionevole per una risposta alla domanda epistemica che ci eravamo posti. Posso dire che in una certa misura questa è anche la direzione in cui andrò io, ma penso tuttavia che da sola non sia una risposta sufficiente, perché rimane da dire cosa sia 'essere auto-evidente', e come questa auto-evidenza ci renda giustificati nel ritenere vera la conclusione. Deve essere detto ancora in virtù di cosa le regole di inferenza sono auto-evidenti e come questa auto-evidenza deve essere relazionata al nostro essere giustificati nel ritenere vera la conclusione. Penso che qui ci sia bisogno di qualcosa di più. Dobbiamo aggiungere qualcosa alla formulazione di Shapiro se vogliamo dare una descrizione di come si arrivi ad ottenere conoscenza attraverso inferenze. Un altro modo per formulare questa proposta di Shapiro potrebbe essere dire che l'inferenza non sia solo valida, ma 'auto-evidentemente valida'. Vedere J come un'inferenza auto-evidentemente valida: questo è quello che dovrebbe essere aggiunto alla formulazione. O si potrebbe anche dire che 'B può essere ottenuto dalle premesse attraverso una catena di inferenze auto-evidentemente valide'. Ben inteso che mi sto riferendo a una persona, cosa sia per una persona vedere un'inferenza come auto-evidente. Probabilmente si vuole qualcosa di più oggettivo e certamente ci sarebbe molto di più da dire riguardo a questa auto-evidenza: essa deve essere resa in qualche modo più sostanziale, per poter percorrere questa strada. Alla fine forse approderemo a una descrizione simile, ma si deve dire qualcosa in più di quello che ha detto Shapiro. Un'altra via potrebbe essere pensare che questa relazione significhi 'p riconosce che J è valida'. Si tratta di una proposta abbastanza frequente, cioè che si possa parlare di una forma di validità riconosciuta, che è più debole che 'conoscere', aver provato la validità, ma ha tuttavia una qualche sostanza. Così la domanda diventa quale tipo di riconoscimento sia: il problema generale è trovare una relazione che non sia forte quanto 'conoscere la validità', ma abbia una qualche sostanza. Un'osservazione generale è che ovviamente più R è forte (più si domanda da R, più cose si mettono in R), più è facile soddisfare l'implicazione contenuta nella condizione (1). Se si rafforza l'antecedente dell'implicazione è più facile rendere vera l'implicazione stessa. Ma più si rende forte R, meno è possibile che (2) sia una descrizione ragionevole di come si ottiene conoscenza, perché essa richiede che la persona P entri nella relazione R con J, e se R è una relazione molto forte, è più difficile che ciò accada. Ovviamente se si rende R così forte da diventare contraddittoria, allora (1) è trivialmente soddisfatta, ma (2) non sarà mai soddisfatta, perché nessuna persona P può entrare in una relazione contraddittoria, in uno stato che implica qualche contraddizione. Bisogna bilanciare R: deve essere forte abbastanza da far derivare la conoscenza di B dalle premesse, ma deve essere debole a sufficienza da dare una descrizione possibile di come otteniamo conoscenza. Se si prende una relazione R forte, equiparando R a 'una persona sa che l'inferenza è valida', non 'riconosce che l'inferenza è valida' (ciò che abbiamo iniziato a discutere null'ultima lezione), si ottiene il tipo di relazione che Etchemendy propone non nell'articolo ma nel libro. Egli non (?, 19.50) sostiene che quando la validità è definita teoretico-modellisticamente (quando 'validità' significa che la conclusione B è conseguenza teoretico-modellistica delle premesse), allora (2) non è soddisfatta. La sua argomentazione è che (2) non è il modo in cui otteniamo conoscenza: egli sostiene che in generale si deve conoscere già che B è vera o le premesse false, ovvero si devono già conoscere i valori di verità della conclusione e delle premesse, prima di conoscere che J è valida. Se si prende R come 'conoscere che J è valida', certamente (1) è soddisfatta, a condizione però che la persona P abbia l'abilità di fare un'inferenza (attraverso il modus ponens, o qualche altra inferenza del genere). Perché se P sa che J è valida e ha *ground* per le premesse, allora, se 'validità' significa 'conservazione di verità' per tutti gli argomenti o le inferenze della stessa forma, certamente, se le premesse sono vere allora lo è anche la conclusione. La persona P può quindi inferire che B è vera e se è vero che si ottiene conoscenza da questa inferenza, allora P dovrebbe avere *ground* per B. Ma il problema riguarda (2) e ciò che sostengo è che se è così che otteniamo conoscenza attraverso inferenze, allora non otterremmo mai alcuna conoscenza.

0.0.2 L'argomento di Bolzano

Questa, come ho detto ieri, è la strada che potremmo percorrere per commentare l'articolo di Bolzano che ho citato, o l'articolo di Carroll, su ciò che la tartaruga disse ad Achille, e tentare di risolvere il regresso. Esaminiamo meglio la questione. Quando ho detto che, se (2) è il modo in cui fondamentalmente si ottiene conoscenza attraverso inferenze, allora non si otterrebbe mai conoscenza, non ho voluto dire che non si ottenga mai conoscenza così o che questa situazione non possa mai accadere. Certamente può darsi il caso in cui si abbiano *ground* per alcune premesse, e si sappia che un'inferenza è valida (si abbiano *ground* anche per questo), e quindi si dica che chiaramente B si verifica (che arrivi a conoscere che B è vera). Qualche volta capita che (2) sia il modo in cui otteniamo conoscenza, il modo in cui ragioniamo: abbiamo *ground* per le premesse, sappiamo che l'inferenza è valida e quindi procediamo dicendo che anche la conclusione è vera. Questo può accadere, ma ciò che sostengo è solamente che non sia il modo normale. Perché cosa realmente si fa quando si ragiona come descritto da (2) è rimpiazzare l'inferenza che va dalle premesse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a alla conclusione B, con un'inferenza che ha una premessa in più, cioè la premessa secondo la quale abbiamo un'inferenza da $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a B, e questa inferenza è valida. In realtà è una nuova inferenza. Questo è il punto che Bolzano sottolinea nel passaggio che ho citato del suo articolo. Egli dice: si supponga di avere un inferenza J da A ad B e, se si ha tale inferenza, si supponga di sostenere che A sia *ground* per B.

$$\frac{A}{B}\,J$$

Egli si chiede se si può sostenere che A sia *ground* per B a causa della validità dell'inferenza. Se l'inferenza non fosse valida, A non sarebbe *ground* per B. Quindi forse si dovrebbe dire che non è solo A ad essere *ground* per B quando facciamo un'inferenza come questa (da A a B), ma che sono in verità A e 'J è valida' le premesse della vera inferenza:

$$\frac{A \quad J\,e'\,valida}{B}$$

I *ground* consistono nelle due premesse, ed egli aggiunge che 'J è valida' proviene in realtà dal dire che se A è vera allora anche B è vera, implica che $(A?B)$ è vera:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

Non so perché realmente egli abbia detto questo, in quanto, in accordo con la sua stessa definizione, l'implicazione materiale (?) equivale a 'per tutte le proposizioni della forma $A \Rightarrow_L B$

$$\frac{A \quad A \Rightarrow_L B}{B}$$

Ma avrete realizzato che ciò che importa ora non è che l'inferenza sia valida per tutte le proposizioni che possono essere sostituite ad A e B (per definizione: per ogni $S\,:\,A^S \to B^S$):

$$\frac{A \quad \textit{per ogni}\, S\,:\, A^S \to B^S}{B}$$

Ciò che importa qui è certamente che siano proprio A e B a stare in questa relazione di verità. Non è importante considerare una sostituzione S.

Riassumendo Bolzano ha detto che ciò che accade quando si suppone di ragionare come descritto da (2) è che si rimpiazza l'inferenza J con un'altra inferenza le cui premesse (le nostre *ground*) per asserire B sono A e il fatto che se A è vera allora B è vera, dunque $(A?B)$.

Ma egli dice anche che, per lo stesso tipo di ragionamento, se tale inferenza non è valida, allora queste due premesse non sarebbero *ground* per B. Quindi si dovrebbe proseguire scrivendo:

$$\frac{A \quad A \to B \quad A \wedge (A \to B) \to B}{B}$$

Ovvero si dovrebbe aggiungere un'altra premessa che garantisca la validità della nuova inferenza, ottenendo così un'altra inferenza a tre premesse. Ma il fatto che si abbiano queste tre premesse come *ground* per B, dipende dal fatto che da queste tre premesse si possa giustamente inferire B. E quindi certamente si può continuare dello stesso passo aggiungendo la validità dell'inferenza tra le premesse e proseguendo all'infinito.

0.0.3 L'argomento di Carroll

Un regresso simile ma formulato in maniera leggermente diversa, è quello che Lewis Carroll descrive nel suo articolo *Cosa la tartaruga disse ad Achille.* La storia si svolge così: in qualche modo Achille se l'è cavata col paradosso di Zenone e ha raggiunto la tartaruga. Ora la tartaruga suggerisce un'altra gara, che sarà di natura più intellettuale. L'obbiettivo di Achille diventa forzare logicamente la tartaruga ad accettare la conclusione di una dimostrazione euclidea, composta da passi inferenziali veramente semplici che procedono dagli assiomi di Euclide, passi che diremmo auto-evidenti, della forma 'se A allora B '. Lo scopo di Achille è forzare la tartaruga ad accettare B. Tuttavia la tartaruga accetta A, ma non vede perchè in virtù di questo dovrebbe accettare anche B.

Quindi Achille inizia chiedendo per quale motivo la tartaruga non accetti che se A è vera allora anche B è vera, dal momento che il passo è auto-evidente. E la tartaruga risponde che accetta le due premesse (A e 'se A allora B ') ma continua a non vedere perché dovrebbe accettare che B è vera.

Achille ribatte che dovrebbe farlo dal momento che ha accettato A e 'A implica B ' e quindi le chiede il motivo, siccome se A e 'A implica B ' sono vere allora B deve essere vera. E la tartaruga prosegue dicendo di accettare che se A e 'A implica B ' sono vere, allora B è vera, e formulando così una nuova inferenza a tre premesse, A, 'A implica B ' e 'A e A implica B , implica B '.

Achille esulta la logica ti obbligherà ora ad accettare B !, credendo di essere finalmente giunto alla fine della gara, perché dal momento che la tartaruga ha accettato le tre premesse, allora certamente dovrà accettare anche B. Ma la tartaruga dice di poter accettare che anche quest'ultima premessa sia vera, ma non vede ancora perché dovrebbe accettare B : aggiunge questa nuova inferenza come quarta premessa e la gara va avanti all'infinito.

Lewis Carroll non trae realmente alcuna conclusione dal dialogo tra Achille a e la tartaruga, racconta solo la storia, provocado molte reazioni e commenti, nel corso dei 100 anni e più dalla pubblicazione dell'articolo. Uno dei commenti è stato che la tartaruga sia solo un esempio di nichilismo logico, in quanto non accetta alcun argomento. Ma non penso per niente che ciò sia vero, in quanto ritengo che la tartaruga sia molto cooperativa in questo caso: accetta sempre quello che Achille dice. In questo senso la sua diventa una domanda filosofica ragionevole: perché si dovrebbe essere obbligati ad accettare una conclusione? Penso che in realtà la tartaruga sia troppo cooperativa, perché avrebbe potuto chiedere anche il motivo per il quale le nuove premesse che ogni volta accetta sono valide. Tuttavia penso che il modo in cui Lewis Carroll ha formulato questo dialogo sia molto rilevante per le cose che sto discutendo qui, perché lo scopo di Achille, si potrebbe dire, è di obbligare la tartaruga a considerare vera B . Prima ho parlato di più nei termini di cosa rende 'giustificata' la tartaruga, ma qui il senso è più forte: si tratta di cosa rende la tartaruga 'obbligata' a ritenere vera B , che essa deve accettare che B è vera. Cosa dovrebbe rendere obbligata la tartaruga? Questa è una domanda filosofica molto ragionevole, come molto ragionevole è il dialogo, che penso mostri il punto che ho già espresso: cioè che questa non può essere la giusta descrizione di cosa sia ottenere conoscenza (o essere giustificati o essere obbligati a ritenere vero qualcosa). La via secondo la quale, oltre a conoscere la verità delle premesse, dobbiamo anche conoscere la validità dell'inferenza e aggiungere ogni volta tale validità tra le premesse come un'altra delle *ground* per laconclusione. Penso che ci siano troppi rischi, troppi regressi, che rendono chiaro che non si può derivare fondamentalmente conoscenza in questo modo. Il primo regresso è quello in cui si cade quando si è meno cooperativi di quanto sia la tartaruga e ci si può chiedere perché la premessa aggiunta sia valida, cioè come si possa sostenere questo:

$$\frac{A \quad A \to B \quad A,\, A \to B\, [A, (A \to B) \Rightarrow_L B]}{B}$$

Mostrare che $[A, (A \to B) \Rightarrow_L B]$ è valida significa mostrare che, per ogni proposizione di questo tipo (e in particolare proprio per questa) ottenuta con una sostituzione S dei termini non-logici, si verifica che se A^S è vera e $(A \to B)^S$ è vera, allora B^S è vera. Si deve quindi fare uso del fatto che se un'implicazione è vera, allora se l'antecedente è vero, anche il conseguente è vero. Dunque sostituire $A^S \to B^S$, cioè se A^S è vera allora B^S è vera, ad $(A \to B)^S$.

L'intero argomento, se si vuole seguire una normale distinzione, continua su un metalivello: si mostra riguardo a proposizioni ottenute tramite una sostituzione S che, se la prima premessa ottenuta applicando la sostituzione è vera e così anche la seconda, allora è vera anche la conclusione B ottenuta per sostituzione. Ricordiamo che lo scopo era arrivare a B^S è vera, da A^S è vera e 'se A^S è vera allora B^S è vera'. Ciò può essere certamente fatto solo usando il *modus ponens.* Questo passaggio ad un metalivello è tipico: credo che se si vuole sostenere la validità logica o la conseguenza logica in una relazione come questa, si dovrà usare in un metalivello esattamente la stessa inferenza. Certamente potrà essere qualche volta un'altra combinazione di inferenze, ma essenzialmente si dovrà usare la stessa inferenza. E così anche nel caso in cui ci si interroga sulla validità della premessa aggiunta, si cade in un regresso: la validità del *modus ponens* si può mostrare solo attraverso il *modus ponens* stesso. Certamente qualche volta si può ottenere conoscenza in questo modo, cioè conoscendo già la verità delle premesse e la validità dell'inferenza, e arrivando quindi alla conoscenza della conclusione. Ma se si vuole mostrare il modo in cui si arriva a conoscere la validità dell'inferenza, bisogna fare uso dell'inferenza stessa. Come si può quindi uscire da tale regeresso? è chiaro che Achille non ha avuto successo. Deve aver usato in qualche modo la strategia sbagliata. Appare dunque chiaro che aggiungere solamente la validità dell'inferenza tra le premesse non aiuta. Cosa avrebbe dovuto fare Achille? Suggerisco che avrebbe dovuto dire qualcosa di differente. Avrebbe dovuto esortare la tartaruga dicendo: Per favore. Inferisci. Agisci. Inferisci B da A. Fai questa operazione. Per favore, fallo. Non vedi che ora hai *ground* per B ?!. Certamente il dialogo è formulato in modo che Achille provi a forzare la tartaruga, quindi lei potrebbe opporsi e dire di non voler agire. Il dialogo potrebbe essere perciò formulato in modo che la tartaruga risponda: Per favore, dimmi come posso essere giustificata nel farlo?!. Ia strategia è ora aiutare la tartaruga ad essere giustificata, o se preferite, ad essere obbligata. Quindi la cosa ragionevole da dire è: "Per favore, metti in atto l'inferenza". *ground*

0.0.4 Cos'è fare un'inferenza

La mia idea principale nel descrivere la validità delle inferenze e nel descrivere come esse sono usate per ottenere conoscenza, è che esse vanno viste essenzialmente come atti, nei quali si opera sulle *ground* date per le premesse, per ottenere *ground* per la conclusione. Attuare un'inferenza è compiere un'operazione che trasforma le *ground* per le premesse, in *ground* per la conclusione. Se si analizza il regresso sotto questa luce le cose cambiano. Fare un inferenza è quindi portare a compimento un'operazione e sostenere che il risultato è 'ragione' per la conclusione. E se l'inferenza è valida, se ha successo, allora l'operazione ci fornisce davvero *ground* per B . Ma per dare a questa idea qualche sostanza si deve certamente dire qualcosa di più su cosa le *ground* siano, come vedete negli appunti. Suggerisco quindi che si debba basare la nozione di *ground* sul significato delle proposizioni in questione, o più precisamente suggerisco che i significati delle proposizioni siano dati nei termini di cosa conta come 'ragione' per le proposizioni in questione. Questo è il programma di base che svilupperò ora. La relazione R che abbiamo tentato di definire prima, non deve quindi essere tale che la persona P riconosca la validità dell'inferenza o sappia che l'inferenza è valida. R J deve essere in verità tale che P svolga l'operazione, cioè applichi l'operazione in questione alle *ground* date per le premesse. E la validità è quindi da definire in modo che l'inferenza sia valida se l'operazione dà realmente *ground* per la conclusione. Dunque un'inferenza e in generale individuata da alcune premesse, da una conclusione, da *ground* date per le premesse, e da un'operazione, diciamo ϕ, che opera su questi *ground*:

$$\cfrac{\begin{matrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ A_1 & A_2 & \ldots & A_n \end{matrix}}{A \to B}\ \phi$$

Vista come uno specifico atto individuale, l'inferenza è allora certamente individuata dalla persona che metta in atto l'operazione e dal tempo in cui ciò avviene.

0.0.5 Inferenza-tipo e inferenza-forma

Ma se ora si astrae dalle persona e ci si occupa dell'inferenza-tipo, allora rimangono ad individuare l'inferenza solamente i seguenti elementi: le premesse, le *ground* date per le premesse, la conclusione e l'operazione su queste *ground*. Questa è, si può dire,una inferenza-tipo. Un'inferenza-forma invece non ha specifiche premesse e una specifica conclusione, ma dice solo come queste dovrebbero essere messe in relazione. Un'inferenza-tipo potrebbe essere ad esempio un argomento come il modus ponens per proposizioni specifiche:

$$\frac{P \quad P \to Q}{Q}$$

Mentre un'inferenza-tipo è una descrizione di come qualsiasi proposizione (non c'è bisogno che sia una specifica proposizione) sia messa in relazione con qualsiasi altra in modo tale che la seconda premessa sia l'implicazione tra la prima e la conclusione:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

Essa è solamente la descrizione della relazione tra le premesse e la conclusione: le *ground* non sono date una volta per tutte. L'operazione è invece supposta poter operare su ogni 'regione' che possa essere data per quel tipo di proposizioni. Una specifica inferenza-tipo ha *ground* date. Ma un'inferenza-forma è formulata per qualsiasi 'ragione' possa essere data per le premesse. Una specifica inferenza-tipo potrebbe essere scritta in questa forma:

$\phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; A_1, A_2, \ldots, A_n/B)$

Ovvero indicando un'operazione ? che opera su *ground* date per le premesse $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, e specificando la forma delle premesse $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ e della conclusione B. Una forma inferenziale non ha invece *ground*, ma al loro posto ha variabili: $\phi(xi_1, \xi_2, \dots, xi_n; \dots)$

Questa è più o meno la differenza tra un'inferenza-tipo specifica, ad esempio il *modus ponens* per specifiche proposizioni, e il *modus ponens* solo come forma inferenziale (*inference form.*

Spesso si formula un'inferenza solo dicendo quale sia la conclusione e quali siano le premesse. E qualche volta non vuene scritta realmente un'operazione, ma viene detto semplicemente come avvenga la transizione dalle premesse alla conclusione. Si pensi ad esempio che se si ottengono B e $\neg B$ dall'assunzione A, allora si conclude $\neg A$ attraverso la *reductio ad absurdum* (minimale):

$$\frac{\begin{array}{cc} A & A \\ \vdots & \vdots \\ B & \neg B \end{array}}{\neg A}$$

Diciamo in un certo senso come la transizione avviene.

0.0.6 *Ground*

Il valore del risultato ottenuto applicando l'operazione, se l'inferenza è valida, deve essere *ground* per B:

$\phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; A_1, A_2, \dots, A_n/B) =$ *ground* per B.

L'inferenza è un'operazione sulle *ground* per le premesse, che, se ha successo, restituisce *ground* per la conclusione. E questo è il modo in cui si ottengono *ground* per la conclusione: trasformando quello che è dato in qualcosa di nuovo. Certamente per mettere in atto questa operazione bisogna essere consapevoli di qualcosa, o almeno bisogna essere capaci di fare determinate cose. è simile a quando si dice che, supponendo di avere due numeri, si vuole ottenere la loro differenza, e quindi si compie l'operazione di sottrazione. Cos'è compiere un'operazione di sottrazione? è essenzialmente mettere in atto un'inferenza e per fare ciò una certa misura di consapevolezza è richiesta. Se si sostiene che una persona compie veramente l'operazione di sottrazione, allora essa deve essere in qualche modo consapevole di farlo. Prima di occuparmi di questo voglio però dire qualcosa in più su cosa questa operazione possa essere e su come si sappia che essa produce veramente *ground* per la conclusione. Le *ground* di cui ho parlato sono *ground* conclusive. Certamente il termine *ground* è usato per indicare anche qualcosa di meno che *ground* conclusive, ma in questo contesto è usato con questa accezione. C'è un senso più ristretto di *ground*: qualche volta dicendo che si inferisce B da A, allora A è ritenuta 'ragione' per sostenere di asserire B. Si menziona come 'ragione' solo la premessa dell'inferenza. Ma io non uso la parola in questa accezione: secondo me non è la verità di A che ci giustifica nel considerare vera B, ma è il fatto che abbiamo *ground* per A, e che le '*ground*' per A sono certamente anche *ground* per B. Questo è ciò che intendo con l'avere *ground*: non *ground* nel senso ristretto di verità della proposizione da cui abbiamo inferito la conclusione, ma nel senso di cosa ci rende giustificati nel ritenere la proposizione vera. Come avevo gia detto, occupiamoci ora di cosa una 'ragione' sia per differenti tipi di proposizione. Per dar conto di ciò si deve fare affidamento sul significato delle proposizioni, ossia sul fatto che il significato delle proposizioni sia dato nei termini di cosa conti come *ground.* Quando ho discusso l'idea di Shapiro secondo la quale è il sistema deduttivo a dare il significato delle proposizioni nel sistema, ho sostenuto che tale descrizione fosse troppo ampia. In un certo senso Kolmogorov pensa alle proposizioni come problemi, e la sua idea di inferenza è che, supposto che sia data la soluzione al problema $A_1, A_2, \dots, A_n$, si debba trovare una soluzione del problema B. Quindi da questo punto di vista ci sono certamente connessioni con il discorso che stiamo facendo, come apparirà più chiaro tra un attimo.

0.0.7 *Grounds* e significati

La mia idea è che i significati siano dati in termini di *ground* ed uno si può chiedere quanto questo sia ragionevole e come questo sia relato alla posizione di Shapiro. Cominciamo col dire cosa intendo per ground *diretto*. Ad esempio

$$\gamma \text{ è una ground } \textit{diretto} \text{ per } A \wedge B \equiv \gamma = \wedge I(\alpha, \beta; A, B/A \wedge B)$$
$$\text{ed inoltre } \alpha \text{ è una } \textit{ground} \text{ per } A \text{ e } \beta \text{ è una } \textit{ground} \text{ per } B.$$

Questo è come io spiegherei cos' è un *ground* diretto per una congiunzione, per capire la congiunzione, ti dico cosa conta come *ground* diretto per essa.

Questo è assai diverso dal dire, come fa Shapiro, ecco tutte queste regole danno il significato alle proposizioni. La mia è un'idea molto più ristretta di significato è un'altro modo di specificare il significato molto simile nella sua struttura a come si danno le condizioni di verità di una proposizione. $A \wedge B$ è vero se A ̀vero e B è vero. Spiego cosa sia il *ground* diretto di una congiunzione in termini dei *ground* per le sotto-proposizioni A e B, quindi dò una definizione ricorsiva.

$$\gamma \text{ è una ground } \textit{diretto} \text{ per } A \vee B \equiv$$
$$\gamma = \vee I(\alpha; A/A \vee B) \text{ ed inoltre } \alpha \text{ è una } \textit{ground} \text{ per } A$$
$$\text{oppure}$$
$$\gamma = \vee I(\beta; B/A \vee B) \text{ ed inoltre } \beta \text{ è una } \textit{ground} \text{ per } B.$$

$$\gamma \text{ è una ground } \textit{diretto} \text{ per } \exists x A(x) \equiv$$
$$\gamma = \exists I(\alpha; A(t)/\exists x A(x)) \text{ ed inoltre } \alpha \text{ è una } \textit{ground} \text{ per } A(t)$$

E questa condizione distingue il ragionamento costruttivo da quello classico, per stabilire una proposizione esistenziale, si deve stabilire che una istanza vale.

0.0.8 Ragionamento costruttivo / ragionamento classico

I costruttivisti rifiutano il ragionamento per *reductio ad absurdum*

$$\dfrac{\begin{matrix}\neg A \\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\neg A \\ \vdots \\ \neg B\end{matrix}}{A}\; RAA$$

o rigettano il terzo escluso $A \vee \neg A$.

Non è che negano il terzo escluso o che accettano l'opposto, perchè questo è contraddittorio $\neg(A \vee \neg A)$ (equivale a $\neg A \wedge \neg\neg A$)) ed un intuizionista accetta invece $\neg\neg(A \vee \neg A)$ (non è possibile che né A sia falsa nè $negA$ sia falsa) Questo modo di vedere i significati in termini di *ground* sembra essere direttamente connesso con il modo costruttivo di ragionare, ma non necessariamente si deve guardare a ciò in questo modo perché si può vedere la relazione fra la logica classica ed intuizionista in un m odo assai diverso.

Un intuizionista direbbe che quando un classico dimostra che $\exists x A(x)$ dall'assunzione che $\forall x \neg A(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \neg A(x)}{\vdots}}{B \wedge \neg B}}{\exists x A(x)}$$

quello che il classico intende per $\exists x A(x)$, non è quello che noi intendiamo per $\exists x A(x)$, ma quello che noi intendiamo come $\neg\forall x \neg A(x)$.

Ancora quando un matematico classico asserisce $A \vee B$, ciò non corrisponde a quello che noi intuizionisti intendiamo per $A \vee B$, ma quello che intendiamo per $[A \vee B]^I$, come qui definito:

$[A \vee B]^I = \neg(\neg A^I \wedge \neg B^I)$

di conseguenza il terzo escluso da un punto di vista intuizionista diviene assai non problematico, infatti significa solamente $\neg(\neg A^I \vee \neg\neg A^I)$

In questo modo è possibile interpretare ciò che una persona dice usando il linguaggio classico all'interno del linguaggio intuizionista. Prendiamo uno specifico esempio: il linguaggio dell'aritmetica di Peano. Allora gli intuizionisti possono interpretare le proposizioni dell'aritmetica di Peano in questo modo:

$[t = u]^I = (t = u)$

$[A \wedge B]^I = A^I \wedge B^I$

$[A \to B]^I = A^I \to B^I$

$[A \vee B]^I = \neg(\neg A^I \wedge \neg B^I)$

$[\forall x A(x)]^I = \forall x[\neg A(x)]^I$

$[\exists x A(x)]^I = \neg\forall x \neg A(x)$

Come risultato abbiamo che

$$\vdash_C A \quad \text{implica che} \quad \vdash_I A^I$$

Così da un punto di vista intuizionista è possibile dire, bene sono d'accordo con te quando asserisci A, ma io lo interpreto in questo modo, A^I In questo modo non c'è un reale conflitto fra le due posizioni L'altra freccia è banale

$$\vdash_I A^I \quad \text{implica che} \quad \vdash_C A$$

perchè ogni dimostrazione intuizionista è anche una dimostrazione classica e l'interpretazione I trasforma ogni proposizione A in un'altra A^I ad essa equivalente da un punto di vista classico.

Ma non c'è una simile interpretazione per il logico classico per interpretare il logico intuizionista, così si può dire che anche se la logica intuizionista è un sottosistema della logica classica in verità è l'opposto, perché gli intuizionisti hanno modi di parlare dell'esistenza e della disgiunzione che solo impossibili per un matematico classico, ma ogni cosa che un classico può dire, anche gli intuizionisti lo possono dire. in questo modo è un linguaggio più ricco.

Voglio spiegare la congiunzione in un modo cha vada bene sia per il logico classico che per quello intuizionista, ma do un significato alla disgiunzione ed alla esistenza che è tipica della logica intuizionista, da un punto di vista classico semplicemente non considero la disgiunzione ed il quantificatore esistenziale.