Sei lezioni sulla *Conseguenza Logica*
Dag Prawitz
Lezione 3

(Traduzione di Valentina Benedetti)

marzo 2007

Handout

Bologna, Lecture 3, March 2007 (meant as an aid to the lecture not intended to be self-contained)

III. (cont.) Summary of Shapiro's position

1. There are several intuitive ideas about logical consequence. Among them are $\Rightarrow_{Ded}$ and $\Rightarrow_{L-blend}$ especially noteworthy. They are conceptually independent of each other.
2. Modern logic provides good formal counterparts to these ideas, namely the proof-theoretical $\vdash_D$ and the model-theoretical $\models$, respectively.
3. By using 'informal rigour', exploiting results obtained in logic about these notions, we get results also about the intuitive notions and how they are connected. In this way proof theory and model theory illuminate (each one separately but also together) our philosophical ideas of logical consequence.
4. The dispute between advocates of deductive consequence and model-theoretical consequence concerning which conception is the right or primary one is pointless. Both conceptions are legitimate and neither is primary.

   Shapiro's argument for (4): The logical operators (sentential connectives, quantifiers) have the meanings that proof theory and model theory confer on them, and the two theories give them different kinds of meaning. We cannot wonder about their 'real' meanings.

IV. Etchemendy's criticism of the Bolzano-Tarski definition of logical consequence.
Main argument: The validity of an inference as defined by Tarski is epistemically impotent.

> "A logically valid argument must, at the very least, be capable of justifying its conclusion. It must be possible to come to know that the conclusion is true on the basis of knowledge that the argument is valid and that its premises are true. ... Now, if we equate logical validity with mere truth preservation, ... we obviously miss this essential characteristic of validity. For in general, it will be impossible to know both that an argument is 'valid' (in this sense) and that its premises are true, without *antecedently* knowing that the conclusion is true." ...
>
> "Tarski's account equates validity with the joint truth preservation of a collection of arguments. ... Tarski's equation still misses the essential feature of validity. For in general, it will be impossible to know whether an argument is a member of such a collection

of truth-preserving arguments, hence whether it is 'valid', without antecedently knowing the specific truth values of its constituent sentences.' (Etchemendy, *The Concept of Logical Consequence*, p. 93)

Two problems:

- (a) How to formulate the epistemic significance of a valid inference. By doing so we get a condition which a definition of validity should satisfy: it should be possible to infer from the definition that a valid inference has the epistemic significance in question
- (b) The question whether the Bolzano-Tarski definition satisfies the epistemic requirement.

To (a): Two ways of formulating the epistemic significance.

- (i) Knowing that an inference from $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to B is valid, and knowing that the premises are true, it must be possible to come to know that B is true.
- (ii) If an inference from $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to B is valid, then from our knowledge of the premises, we can establish without further investigation that B is valid as well.

Against (i) as the right formulation of the epistemic significance of a valid inference: Bolzano: *Ob auch die Schlussregel mit zu den Teilgrnden einer Schlusswahrheit gezhlt werden knne* (199 in Bolzano's *Wissenschaftslehre* from 1837) Lewis Carroll: 'What the Tortoise said to Achilles' (in *Mind New Series*, vol IV, 1895, pp 278-280)

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Nell'*handout* trovate i 4 punti con cui avevo sintetizzato la posizione di Shapiro alla fine della scorsa lezione.

Penso che non ci sia molto da obiettare riguardo ai primi tre, problemi sorgono invece con l'ultimo punto. L'argomento di Shapiro è che gli operatori logici (connettivi e quantificatori) hanno i significati che la teoria della dimostrazione e la teoria dei modelli conferiscono loro, ed essi sono diversi, le due teorie conferiscono significati diversi. E per Shapiro non ha senso chiedersi quale sia il 'vero' significato di questi operatori, quindi l'intera disputa non ha senso.

L'intera argomentazione di Shapiro lascia alquanto perplessi, ma chiediamoci come è che questa concezione deduttiva di conseguenza logica ($\Rightarrow_{Ded}$ o $\vdash_D$) dà significato agli operatori logici? La domanda principale è: come avviene ciò? Che la teoria della dimostrazione ($\Rightarrow_{Ded}$ o $\vdash_D$) dia significato, penso sia negato in ogni manuale di logica. La posizione condivisa in logica nell'ultimo secolo è che c'è una sintassi che ci dà i linguaggi formali e ci dice quali sono le formule di questi linguaggi e quali sono le dimostrazioni e le regole di inferenza, e poi c'è una semantica che dice cosa significhino queste formule e quand'è che sono vere. E' attraverso la semantica che i linguaggi formali ottengono significato. Questo è il modo di vedere standard. In questo contesto allora la proprietà della correttezza (*soundness*) è una proprietà molto importante:

$\Gamma \vdash_D A$ implica $\Gamma \models A$

Affinché la sintassi sia interessante è necessario che questa implicazione valga, perché nessun sistema deduttivo da solo conferisce alcun significato al linguaggio. Se si verifica anche l'altra freccia

$\Gamma \models A$ implica $\Gamma \vdash_D A$

e cioè che tutte le conseguenze logiche sono deducibili in D, è una buona cosa, un *bonus*, ma non possiamo sempre richiederlo.

sintassi linguaggio formale - dimostrazione

correttezza

semantica

Shapiro al contrario sostiene che sia il sistema deduttivo a dare significato agli operatori logici e che abbia priorità rispetto alla semantica, ovvero è il sistema deduttivo che fondamentalmente dà significato, e la semantica, se ce ne deve essere una, deve rispettare il significato che esso dà alle costanti logiche. Di conseguenza, se si assume questo punto di vista, allora la teoria dei modelli deve rispettare questo significato e se qualcosa è conseguenza logica di qualcos'altro, allora i significati e i valori di verità dati alle formule devono essere tali da rispettare tale significato. Quindi l'implicazione

$\Gamma \models A$ implica $\Gamma \vdash_D A$

è essenziale; la correttezza, viceversa, è un *bonus*.

Tutto questo sembra abbastanza strano a chiunque abbia qualche nozione di logica, ovvero che la completezza sia essenziale e la correttezza un *bonus*, anzi suona come completamente assurdo. E certamente suona assurdo anche a Shapiro, ma questo è quello che avverrebbe se si assumesse la sua posizione. Alla fine Shapiro sembra dire che sì anche il sistema deduttivo dà significato, ma ognuna di queste idee deve stare nel suo ambito, e non interferire con le altre.

0.0.1 Il significato è l' uso

Se ci spostiamo alla filosofia del linguaggio contemporanea o dell'ultimo secolo, questa idea secondo cui il significato è dato fondamentalmente dalle regole d'uso, non è considerata così assurda, al contrario è una visione abbastanza diffusa. Mentre il primo Wittgenstein del *Tractatus* sostiene che il significato è dato dalle condizioni di verità, la posizione dell'ultimo Wittgenstein è spesso sintetizzata da 'Il significato è l'uso': il significato di una proposizione è dato da come essa è usata.

Quando si formula un sistema deduttivo e si danno regole di inferenza, allora in un certo senso si dice come queste formule devono essere usate. Questo è un modo per specificare l'uso e quindi si può pensare che sia anche un modo per specificare il significato. Ora la domanda è: ogni insieme di regole d'uso determina il significato? La posizione di Wittgenstein è certamente negativa. Egli direbbe che qualche volta è giusto citare l'uso di un'espressione per dire quale sia il suo significato, ma altre volte questo non è un modo adeguato, non possiamo citare solo l'uso. Il mio punto di vista è che ciò sia giusto: per esempio, se ci si chiede perché $3 + 1 = 4$ è vero, si potrebbe rispondere che è così che 4 è definito, è il numero dopo 3. Questo è come usiamo 4 nellinguaggio, è il significato di 4, non c'è nient'altro da aggiungere. Analogamente se si inferisce $A \wedge B$ dalle due proposizioni A e B, ci si potrebbe domandare com'è che si può fare ciò. La risposta potrebbe essere : è come '$\wedge$' è usato, non si può dare spiegazione migliore. Capita spesso nella vita ordinaria che ci si riferisca all'uso per spiegare il significato. Altre volte invece non sembra appropriato. Se si dice, ad esempio, che $2 + 2 = 4$ e ci si chiede perché, non sarebbe appropriato rispondere che 'è così che usiamo 2, 4, + e ='. Al contrario si dovrebbe dire che vale in virtù del significato dei simboli 2, 4, + e = . Ci sono molti esempi di inferenze in cui non si potrebbe dire che esse valgono perché così è come vengono usate, ma che sono valide per il significato dei simboli che occorrono in esse.

La posizione secondo la quale tutti gli usi e tutte le regole d'uso determinano il significato dei simboli, è sostenuta da Quine, infatti egli pensa che non si possa fare una distinzione tra affermazioni riguardo il significato di un'espressione e affermazioni riguardo fatti del mondo. Ma questa è una posizione abbastanza radicale e non è affatto la posizione di Shapiro.

Shapiro è contro questa idea e cita un esempio dato da Prior. Supponiamo di introdurre un operatore logico che chiamiamo *tonk*, così che possiamo scrivere A *tonk* B, e ora spiegheremo cosa *tonk* significhi dando le regole d'uso. Le regole sono le seguenti.

Regole di introduzione: Regole di eliminazione:

$$\frac{A}{A\,tonk\,B} \qquad \frac{B}{A\,tonk\,B} \qquad \frac{A\,tonk\,B}{A} \qquad \frac{A\,tonk\,B}{B}$$

Queste quattro regole determinano il significato di *tonk*. Prior dice che certamente ciò è un non-senso. Queste regole non danno alcun significato a *tonk*, è solo spazzatura, perché come vedete si può inferire

$$\cfrac{\cfrac{A}{A\,tonk\,B}}{B}$$

in altre parole si può inferire da A ogni altra proposizione B. Quindi è un sistema inconsistente per cui non si può dire che qualsiasi regola determini il significato di un'espressione. *tonk* non significa nulla. Shapiro cita una risposta consueta a questo esempio, ovvero che il problema con queste regole è che non sono *armoniose*, in particolare che non rispettano quello che io chiamo, seguendo Lorenzen, il *principio di inversione*.[1] Consideriamo per esempio le regole di introduzione e di eliminazione di '$\wedge$':

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\wedge I \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A}\wedge E_1 \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}\wedge E_2$$

Il principio di inversione dice che ciò che si ottiene quando si usa una regola di eliminazione è ciò che si aveva già quando si era usata la regola di l'introduzione,

Similmente,

$$\cfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\to I \qquad\qquad \frac{A \qquad A \to B}{B}\to E$$

Nella regola di eliminazione, in un certo senso si aveva già B se si era inferito $A \to B$ attraverso la regola di introduzione $\to I$, perché ciò implica che si aveva una derivazione di B da A, e dunque data una derivazione di A, si può semplicemente 'metterla sopra' alla derivazione di B da A ed ottenere una derivazione di B.

Questa proprietà è ciò che rende possibile dimostrare che ogni deduzione può essere *normalizzata*. Se si mostra che le dimostrazione sono normalizzabili, allora la consistenza è assicurata.

Questo è come Shapiro pensa che si possa evitare la situazione spiacevole descritta nell'esempio di Prior: solo se le regole soddisfano certe condizioni, sono armoniose e quindi soddisfano il principio di inversione, possiamo dire che danno significato.

E' ben vero che così si evita questo tipo di controesempio di Prior, ma nondimeno non è ancora chiaro come si ottenga il significato; forse si possono dare altri controesempi che renderebbero molto strano pensare che le regole diano significato.

In ogni modo, rimane da essere discusso - a Shapiro non lo fa - se regole di inferenza che soddisfano il principio di inversione conferiscano davvero il significato alle costanti logiche, perché non è affatto chiaro che un sistema deduttivo dia il significato alle costanti logiche.

[1] Il principio di inversione, è soddisfatto dalle regole d'inferenza del sistema di Gentzen.

0.0.2 Significato in teoria dei modelli

Ugualmente dubbio è che la teoria dei modelli dia significato agli operatori logici, soprattutto è discutibile se si pensa che anche la nozione di verità sia definita allo stesso tempo dalla teoria dei modelli. Allora la teoria dei modelli deve fare entrambe le cose, definire la verità e dare significato, è ciò è davvero troppo. Si veda a questo proposito un passaggio (pp. 679-680) del mio articolo 'Logical Consequence from a Constructive Point of View', che è nell'elenco delle letture del corso.[2]

"As regards logic, the idea is expounded in Church's [1956] classical textbook and is nowadays often presented in teaching of elementary logic, where sentential operators are said to get their meaning by their truth tables. More generally, the meaning of a logical constant c is said to be determined by the uniform truth condition of the sentences with c as its main sign given in the form of an equivalence such as: $\neg A$ is true if and only if A is not true, $A \wedge B$ is true if and only if both A and B are true $A \vee B$ is true if and only if at least one of A and B is true, and so on. For a quantified sentence $(\forall x \in D)A(x)$ the truth condition may be stated: $(\forall x \in D)A(x)$ is true if and only if $A(t)$ is true for all terms t that denote elements in D. (This formulation requires that names for all elements of D are available in the language. Alternatively, if we do not want to rely on such an assumption, we speak of assignments of values to the variables and define in a similar way the notion of truth (or satisfaction) under such assignments.)

Questions about the meaning of the logical constants thus seem to have a straightforward answer in terms of such truth conditions. However, the substance of this answer depends on what we take truth to be. One must here beware of a possible confusion, which especially Dummett (see e.g. Dummett [1978], pp xx-xxi) has drawn attention to. The truth conditions for compound sentences of different logical form coincide formally with recursive clauses that occur in the definition of truth (as given by Tarski [1935/1936]) or in the definition of truth relative to a possible model (as is standard in model theory), and one may therefore be led to think that truth is what is defined in this way. But obviously the truth conditions cannot simultaneously do service both in a definition of truth and in an explanation of the meaning of the sentences in question. In other words, the equivalences of the kind exemplified above cannot be taken as clauses in a recursive definition of truth, and at the same time be taken as explaining the meaning of the logical constants exhibited this would be like solving two unknowns given only one equation. If we have defined a set S of sentences by saying that it is the least set of sentences containing certain atomic formulas and satisfying certain equivalences such as

$$A \wedge B \text{ belongs to } S \text{ if and only if both } A \text{ and } B \text{ belong to } S,$$

then obviously we get no information about the meaning of the logical constants by being told again that these equivalences hold. Similarly, a person who does not know what truth is but is informed that it is a notion satisfying certain equivalences of the kind given above does not get to know the meaning of a logical constants by then being told again that these equivalences hold.

We must conclude that truth conditions can serve as meaning explanations only if we already have a grasp of truth. Accordingly, we find that Frege and those who follow him in thinking that meaning is given by truth conditions are careful to note that truth is taken as an already known notion. In contrast, Tarski, who wants to define truth but is anxious that his definition is adequate, is careful to note that he is taking the meaning of the sentences for which truth is defined as already known. Tarski takes instances of the equivalences given above, so-called T-sentences, which of course follow from his definition of truth, as showing the material adequacy of his definition of truth. In order that they are to serve in this way, showing us the correctness of the truth definition, we must of course know that the T-sentences themselves are correct, and this we can know only if we already know the meaning of the sentences that are mentioned in the T-sentences.

An informative answer to the question of what the logical constants mean thus require that we further ask what truth is."

[2] Per facilitare il lettore riportiamo qui di seguito il passaggio in questione.

0.0.3 Teorie formali - teorie informali

Secondo Shapiro se si ha una derivazione di una proposizione A da un insieme Γ, allora le proposizioni corrispondenti nel linguaggio naturale stanno tra loro nella relazione di conseguenza logica in senso deduttivo.

$$\Gamma \vdash_D A \quad \text{implica} \quad \underline{\Gamma} \Rightarrow_{Ded} \underline{A}$$

Per questo è richiesto che si abbia un'idea del significato delle proposizioni nel sistema deduttivo, altrimenti non si potrebbe individuare quali sono le proposizioni corrispondenti nel linguaggio naturale.

E' chiaro che se si dice solamente che $\vee$ deve essere tradotto con 'o', $\wedge$ con 'e', e così via, questo non è sufficiente, perché certamente 'o' e 'e' sono ambigui, per cui si può avere 'o' in senso esclusivo oppure 'e' che tiene conto dell'ordine temporale, e così via. Quindi si deve dare una qualche spiegazione ulteriore di come vanno considerati 'o' e 'e'.

E quale spiegazione ulteriore debba essere data dipende certamente dal *significato* che si vuole tradurre nel linguaggio naturale. Si richiede quindi che emerga da $\Gamma \vdash_D A$ un significato molto chiaro, sì che si possano considerare le proposizioni *corrispondenti* nel linguaggio naturale. Tutto questo getta dubbi sulla principale nozione introdotta da Shapiro di correttezza e adeguatezza di D.

Penso che si dovrebbe guardare alla relazione tra linguaggio formale e linguaggio naturale in modo diverso da quello seguito da Shapiro. Ma come? E' un tema vasto che non approfondirò. La mia posizione parte comunque dalla domanda:

> un linguaggio formale con la nozione di deduzione, o un linguaggio formale con una teoria dei modelli, può essere veramente visto come un mezzo di comunicazione, o un mezzo per fare matematica?
>
> E' sensato dire che si può guardare a un sistema formale con una teoria dei modelli, o a un sistema formale con un sistema deduttivo, come a una forma di modello o di idealizzazione di ciò che accade nel linguaggio naturale, nella matematica informale ordinaria?
>
> Possiamo usarlo al posto del nostro linguaggio naturale come un modo per fare matematica?

Penso che si dovrebbe affrontare il problema in questi termini, ma non possiamo perseguirlo in questa sede.

0.0.4 Ancora su $\underline{\Gamma} \Rightarrow_{Ded} \underline{A}$

Shapiro non dà in realtà nessuna risposta a ciò che io penso sia la domanda principale:

> la nozione di conseguenza logica definita da $\Rightarrow_{Ded}$ come si relaziona all'uso epistemico delle inferenze?

Come è che possiamo usare inferenze per ottenere conoscenza? come è che conoscendo A possiamo arrivare a conoscere B, eseguendo un'inferenza valida. Com' è possibile ciò? Questo è quello che vorremmo sapere: vorremmo spiegare il fatto che usiamo inferenze per guadagnare conoscenza. E questa nozione di conseguenza logica in senso deduttivo, $\Rightarrow_{Ded}$, non fa per niente questo, perché prende solo certe inferenze come immediatamente valide, e dice che se qualcosa è una conseguenza logica dovrebbe essere ottenuto da una catena di queste inferenze immediatamente evidenti. E questo non spiega quella che penso sia la sfida principale:

> **come possiamo usare inferenze per estendere la nostra conoscenza.**

Penso che Shapiro lasci aperte le domande più interessanti. Questo non significa che io pensi che i sistemi deduttivi non siano di alcun interesse. Certamente sono abbastanza interessanti come tipi di assiomatizzazioni della nozione di conseguenza logica. Quando si fa un'assiomatizzazione si prendono alcune cose come immediatamente evidenti e poi si vede cosa può essere ottenuto da queste. E' un'assiomatizzazione nel senso in cui Leibniz ha modificato l'idea originale di assiomatizzazione di Aristotele. In questo senso $\Rightarrow_{Ded}$ è una nozione interessante, ma non spiega le questioni filosofiche più interessanti.

0.0.5 Etchemendy

l libro di Etchemendy, *The Concept of Logical Consequence* ha causato un grande dibattito, ma penso che si possa dire che non ha avuto un impatto forte nel senso che non ha cambiato l'opinione generale. Ciò che Etchemendy fa, è di attaccare la nozione di conseguenza logica data da Tarski. Egli dice che la tale nozione ha mancato il punto essenziale e la critica in modo pesante. Questo avrebbe dovuto dar luogo ad una sorta di rivoluzione in logica, rivoluzione che però non è avvenuta. In seguito Etchemendy ha scritto un articolo, che inizia dicendo che si tratta di una bozza, *comments welcome, but please do not quote*.

Nell'articolo fa alcune osservazioni sul libro e dice che due sono le cose di cui si dispiace:

- di aver dato troppi dettagli: non si vede la foresta a causa degli alberi,
- di non aver proposto una visione alternativa sulla conseguenza logica

Nell'articolo egli prova a risolvere questi due problemi dando un sommario di ciò che pensa sia il suo argomento principale, e dice poi qualcosa, ma non molto, sulla propria visione sulla conseguenza logica.

L'articolo, come avete visto, contiene varie sezioni e la prima sezione è l'*adeguatezza concettuale* nella visione di Tarski' e sostiene che non è concettualmente adeguata.

La seconda sezione è l'*adeguatezza estensionale* della visione di Tarski, nella quale egli mostra che talvolta la nozione di Tarski 'genera in eccesso' (*overgenerates*), ovvero dichiara essere conseguenze logiche cose che non lo sono, talaltra 'genera in difetto' (*undergenerates*), nel senso che certe cose che sono conseguenza logica dal punto di vista intuitivo, non risultano esserlo secondo Tarski.

Mi concentrerò ora sulla adeguatezza concettuale. Guardiamo per prima cosa al riassunto che Etchemdy stesso fa della sua stessa posizione. Egli dice che il problema della definizione di Tarski è una 'confusione dei sintomi con le loro cause'. Che un argomento valido preservi la verità è un sintomo della validità, e Tarski lo identifica erroneamente con la validità stessa. La conservazione della verità è un effetto, un sintomo che proviene dalla validità, cioè quando la verità delle premesse garantisce, in un senso molto più forte di quello di Shapiro, la verità della conclusione.

Questo è un sommario molto metaforico, non è un'argomentazione: 'confondere i sintomi con le cause'. Ma seguiamo Etchemendy nella sua metafora. Supponiamo di avere una malattia e di definire cosa sia 'avere tale malattia'. Una persona, p, ha la malattia $Dis(p)$ se e solo se essa mostra certi sintomi:

$$Dis(p) \quad \equiv \quad S_1(p) \wedge S_2(p) \wedge S_3(p)$$

Cosa non va in una tale definizione di malattia? Il problema è che, supposto che una persona mostri alcuni sintomi, ci si può chiedere se mostrerà anche gli altri:

$$S_1(p) \wedge S_2(p) \rightarrow S_3(p) \ ?$$

Se la malattia è definita in questo modo, allora certamente ciò non si può dire. Può essere detto solo che o la persona mostra il terzo sintomo, e così, secondo la definizione, avrà la malattia, o non lo mostra e non avrà la malattia. E' la sola cosa che si può dire. Di solito in medicina si prova a definire le malattie non attraverso i sintomi, ma attraverso le cause sottostanti i sintomi, qualcosa del tipo organi non funzionati, o infezioni, e altre cose del tipo.

Forse si può ottenere il risultato che i primi due sintomi sono segni affidabili del fatto che la persona abbia la malattia:

$S_1(p) \wedge S_2(p) \rightarrow Dis(p)$

Ma ora la malattia non è più definita come sopra. I due sintomi sono tali da fare inferire giustamente che la persona ha la malattia, cioè che ci sono alcuni problemi sottostanti, come organi non funzionanti, o infezioni o cose del genere. Allora avendo questi problemi, si può inferire che la persona mostrerà anche il terzo sintomo:

$$[S_1(p) \wedge S_2(p) \rightarrow Dis(p)] \wedge [Dis(p) \rightarrow S_3(p)]$$

Questo penso che sia il ragionamento medico, dal momento che non definisce la malattia in termini di sintomi.

E questo penso che sia più o meno come ragiona Etchemendy. Egli dice :

> The property of being logically valid cannot simply consist in membership in a class of truth preserving arguments, however the class may be specified. For if membership in such a class were all there were about logical consequence, valid arguments would have none of the characteristics described above. They would be, for example, epistemically impotent when it comes to justifying a conclusion. Any uncertainty about the conclusion of an argument whose premises we know to be true would translate directly into uncertainty about whether the argument is valid (p. 5-6)

Se abbiamo un'incertezza sulla validità di un'inferenza

$$\frac{A}{B} \quad valida?$$

e la validità è definita in termini di conservazione della verità, allora possiamo dire solo che se si sa che A è vera e ci si chiede se anche B è vera, allora si può dire che o B è vera e l'inferenza è valida, o B non è vera e l'inferenza non è valida. Come nell'esempio della medicina. Così o la persona mostra anche il sintomo $S_3(p)$ e quindi ha la malattia, o non lo mostra e non ha la malattia. O B è vera e l'inferenza è valida, o B non è vera è l'inferenza non è valida. Non si dà alcuna possibilità di predire o di inferire che qualcosa sia il caso. Ma tutto questo è metaforico. Il suo argomento principale, che è dato nel libro, così recita:

> "A logically valid argument must, at the very least, be capable of justifying its conclusion. It must be possible to come to know that the conclusion is true on the basis of knowledge that the argument is valid and that its premises are true. ... Now, if we equate logical validity with mere truth preservation, ... we obviously miss this essential characteristic of validity. For in general, it will be impossible to know both that an argument is 'valid' (in this sense) and that its premises are true, without *antecedently* knowing that the conclusion is true." ...
>
> "Tarski's account equates validity with the joint truth preservation of a collection of arguments. ... Tarski's equation still misses the essential feature of validity. For in general, it will be impossible to know whether an argument is a member of such a collection of truth-preserving arguments, hence whether it is 'valid', without antecedently knowing the specific truth values of its constituent sentences." (Etchemendy, *The Concept of Logical Consequence*, p. 93)

Rispetterò il desiderio di Etchemendy e non citerò il suo articolo, ma almeno oralmente possiamo farlo, penso. Se prendete l'articolo, all'inizio dell'argomentazione dice :

> If an argument is logically valid, then the truth of its conclusion follows necessarly from the truth of the premises. From our knowledge of the premises we can establish, without further investigation, that the conclusion is true as well. (p. 4)

Poi continua dicendo che se si definisce la verità nel modo di Tarski, allora non si cattura questo requisito epistemico. E quindi il suo argomento è essenzialmente lo stesso del libro. Ci sono due domande che possono essere sollevate: una è come si dovrebbe formulare la significanza epistemica di un'inferenza valida. (Problema 2.a dell'handout). Se si riesce ad esprime in cosa consista l'uso epistemico di un argomento valido, allora abbiamo un test e si può controllare e proporre definizioni che soddisfino veramente questo requisito. Ma il problema è formularlo in modo adeguato. E la seconda domanda è se la definizione di Bolzano-Tarski di conseguenza logica soddisfa il requisito epistemico. Si può notare ora che c'è una netta differenza tra la formulazione data nel libro, e quella nell'articolo. Perché nel libro egli dice che se si conosce che certe premesse sono vere e che un'inferenza dalle premesse a qualche altra proposizione è valida, allora si può venire a conoscenza che la conclusione è vera. Ma nell'articolo egli dice che se un argomento è valido, non che si sa che sia valido, allora dalla nostra conoscenza delle premesse si può stabilire senza ulteriori investigazioni che anche la conclusione è vera. Ciò è abbastanza differente. Scriviamolo più esplicitamente. Supponiamo di avere un'inferenza con n premesse da cui si arriva alla conclusione B, e chiamiamola J.

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}\,J$$

Nel libro Etchemendy dice che se

> se p sa che J è valida
>
> e p sa che $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono vere
>
> allora p sa che B è vera.

Nell'articolo egli dice che

> se J è valida
>
> e p sa che $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono vere
>
> allora p sa che B è vera.

Penso che il requisito formulato nell'articolo sia troppo forte, e quello del libro sia troppo debole. Guardiamo per prima cosa perché il requisito dell'articolo è troppo forte. Può sembrare ragionevole se si pensa a un'inferenza molto semplice come questa:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

Si può dire che se p sa che A è vera e $A \to B$ è vera, allora p è giustificato nel considerare B vera. Perché no? Ma consideriamo ora un esempio più complicato in cui non è così immediato che l'inferenza sia valida. Prendete l'ultimo teorema di Fermat, che ha una dimostrazione molto complicata, rimasta sconosciuta per molto tempo. Perché è una dimostrazione del teorema? Perché inizia con alcuni assiomi, o punti partenza, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, e poi si fanno inferenze fino a che non si arriva al teorema. Ora questa inferenza è valida, non sembra immediatamente valida, ma è valida:

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{teorema\, di\, Fermat}\,F$$

E' ben vero che F è valida, ma nessuno direbbe che se si conoscono che i punti di partenza sono veri - cosa che più o meno ogni matematico dovrebbe sapere - allora si è anche giustificati nell'asserire il teorema di Fermat. Questo non è certamente corretto, è richiedere troppo.

Abbiamo quindi un esempio di un'inferenza valida, F, le cui premesse sono note come vere da molte persone, ma tali persone non conoscono il teorema di Fermat. Prima che While ne desse la prova, era già vero che l'inferenza era valida. Non lo sapevamo (non conoscevamo la dimostrazione), ma l'inferenza era certamente valida. Egli ha provato che l'inferenza è valida. Tutta la dimostrazione equivale a dire che l'inferenza è valida. F era valida anche prima, ma finché non è stata data la dimostrazione, non si poteva dire che qualcuno conoscesse il teorema di Fermat.

Questo punto penso sia molto importante: che il requisito formulato nell'articolo è troppo forte, non può essere richiesto.

Nel libro invece dice che se una persona conosce la validità e sa che le premesse sono vere, allora sa che la conclusione è vera. Ora non si può dare un controesempio come il precedente. Non è solo valida ma si sa che è valida. Ma questo è molto debole e non è il modo in cui noi ragioniamo, non accade che prima stabiliamo certe premesse, poi stabiliamo che un'inferenza è valida, e dopo proseguiamo nel dire che la conclusione è valida. Non è il modo in cui ragioniamo. Non diciamo: in qualche modo siamo arrivati ad A e in qualche modo ad $A \to B$, sappiamo che il *modus ponens* è valido, allora B è valida. Questo non è il modo in cui ragioniamo:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{A} \qquad \dfrac{\vdots}{A \to B} \qquad modus\, ponens\, e'\, valido}{B}$$

Non si ha una terza premessa. E' davvero sorprendente come, se assumiamo di ragionare inserendo tra le premesse che il *modus ponens* è valido, allora cadiamo in un regresso all'infinito, descritto molto bene da Bolzano (1837) nell'articolo che ho citato, il cui titolo in Italiano suona: 'Se la validità di un'inferenza debba essere annoverata tra le ragioni per la correttezza dell'inferenza'. E un regresso simile è descritto in un modo più divertente da Lewis Carroll, nell'articolo 'What the tortoise said to Achilles'. L'articolo di Bolzano è del 1837, quello di Carroll è del 1895 ed è più conosciuto.

Il problema che ci aspetta è trovare una condizione fra le due appena discusse - e non è ovvio come fare - e vedere se e come la definizione di Bolzano-Tarski soddisfi tale condizione.