Sei lezioni sulla *Conseguenza Logica*
Dag Prawitz
Lezione 1

(Traduzione di Valentina Benedetti)

marzo 2007

Handout

Bologna, Lecture 1, March 2007 (meant as an aid to the lecture not intended to be self-contained)

I. Introduction

1. Main theme: logical consequence and validity of inferences.
2. Distinction between correct and valid inferences (compare: correct and true assertions).
3. Logic *versus* philosophy of logic.
4. Conclusive grounds, proofs. Fallibilism.
5. Challenge for logic and philosophy of logic: Explain how we gain knowledge by valid inferences and how a valid inference compels us.
6. Contributions of logic that cast light upon the validity of inferences:
   (a) Analysis of logic form. Creation of formal languages.
   (b) Proof theory. Analysing inferences as chains of some most elementary inferences.
   (c) Model theory. Truth in models, counter models to invalid inferences, definition of logical consequence.

II. The Bolzano-Tarski definition of logical consequence
III. Shapiro's position

1. Intuitive, pre-theoretic ideas concerning logical consequence:
   - $\Gamma \Rightarrow_M A$: it necessarily holds that if Γ is true, then A is true
   - $\Gamma \Rightarrow_W A$: for all possible worlds w, if Γ is true in w, then A is true in w
   - $\Gamma \Rightarrow_S A$: the truth of Γ guarantees the truth of A in virtue of the meaning of the terms
   - $\Gamma \Rightarrow_{FS} A$: the truth of Γ guarantees the truth of A in virtue of the meaning of the logical terms
   - $\Gamma \Rightarrow_R A$: it is irrational to maintain that Γ is true and that A is false. Γ justifies A.

- $\Gamma \Rightarrow_{Ded} A$: there is a deduction of A from Γ by a chain of legitimate, gap-free (self-evident) rules of inference.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Come sapete il titolo di questo corso è *Conseguenza logica* e mi occuperò proprio della nozione di conseguenza logica e del suo concetto gemello di inferenza valida. Un'inferenza è fondamentalmente un *atto*, un *atto mentale* in cui si procede da alcune premesse, diciamo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e si inferisce la conclusione B. In italiano si riferisce sull'esito di un atto mentale di questo tiupo, dicendo:

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ quindi B

  oppure

- B perché $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Si fa un'asserzione ed allo stesso tempo si danno ragioni (*grounds*) per quella asserzione, cioè si proferisce un'inferenza.

In logica rappresentiamo questo atto mentale scrivendo le premesse sopra la linea e la conclusione sotto la linea:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$$

Come sapete esistono inferenze di complessità maggiore di questa, come ad esempio la *reductio ad absurdum*, ma per ora ci occuperemo di inferenze di questo tipo semplice. Ora, dal momento che un'inferenza è un atto mentale come credere o giudicare - asserire, invece, è contemporaneamente un atto mentale e linguistico - possiamo distinguere tra la validità di un'inferenza e quale deve essere il caso per una persona affinché possa con ragione asserire la conclusione B dalle premesse $A_1, \ldots, A_n$.

Questa è una distinzione simile a quella che si ha quando di fronte ad un'asserzione, diciamo A, da una parte ci si chiede se quanto viene asserito è *vero* e dall'altra ci si chiede se è *corretto*, ovvero se la persona che fa l'asserzione ha il diritto di farlo, se ha realmente ragioni per dire ciò che dice.

Allo stesso modo possiamo chiederci quale debba essere il caso affinché l'atto mentale nel senso visto sopra sia corretto, più avanti in questa serie di lezione tornerò su questa questione, ovvero quali condizioni una persona deve soddisfare per fare inferenze corrette, ma per il momento, per oggi almeno, astrarremo dall'agente, e ci concentreremo su questa transizione dalle premesse alla conclusione e ci domanderemo se questa transizione è legittima, ovvero se l'inferenza è valida. Usualmente si sostiene che:

> un'inferenza è valida se e solo se la conclusione B è conseguenza logica delle premesse $A_1, \ldots, A_n$.

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B} \quad \text{è } \textit{valida} \qquad \text{sse} \qquad A_1, \ldots, A_n \Rightarrow_L B$$

Utilizzerò il simbolo $\Rightarrow_L$, per indicare che B è, da un punto di vista intuitivo, conseguenza logica delle premesse $A_1, \ldots, A_n$.

Il nostro interesse nella nozione di conseguenza logica nasce proprio da questa equivalenza che risponde alla questione della validità di un'inferenza.

Ora, la nozione stessa di validità di un'inferenza o di una conclusione di essere conseguenza logica delle premesse sono certamente nozioni centrali all'indagine logica. Fondamentalmente possiamo dire che la logica è lo studio delle inferenze valide.

In logica per studiare la validità delle inferenze si procede deduttivamente come in matematica, ossia si procede seguendo un metodo che è anche l'oggetto dell'indagine, per studiare la validità delle inferenze si fanno molte inferenze. La logica procede deduttivamente e stabilisce risultati in modo deduttivo come in matematica. Ci possiamo chiedere da un punto di vista filosofico se i risultati ottenuti in modo deduttivo gettino luce realmente sulla nozione di conseguenza logica come noi la intendiamo usualmente o come viene usata in filosofia in generale. Ci si può chiedere se un'analisi della conseguenza logica in logica - che procede deduttivamente - sia davvero significativa. Si entra così in ciò che possiamo chiamare *filosofia della logica*. Non voglio fare alcuna distinzione netta fra queste due settori: logica e filosofia della logica; ma si devono tener presenti entrambi, da una parte si hanno le procedure deduttive in logica con cui si dimostrano cose in logica e dall'altra si hanno discussioni su come questi risultati così ottenuti gettino luce sulla nozione di conseguenza logica come la si intende usualmente.

Se avete guardato la letteratura che è stata scelta per questo corso, Tarski, Shapiro, Etchemendy e me stesso[1] avete visto che c'è un disaccordo netto su questa questione filosofica ed uno potrebbe essere sorpreso che ci siano conflitti d'opinione riguardo a nozioni basilari coma la conseguenza logica. Ma questa è la situazione tipica in filosofia dove ci sono forti disaccordi relativamente a nozioni filosofiche basilari. Si potrebbe dire che in qualche modo questo è lo *charme* della filosofia che fin dall'inizio ci mette di fronte a questioni aperte, alla 'frontiera della ricerca'. Nella maggior parte delle scienze si deve procedere assai a lungo prima di arrivare alla frontiera della ricerca, alle questioni aperte; in filosofia ci si trova spesso là direttamente. Naturalmente per discutere queste questioni in modo interessante uno deve prendere nota della conoscenza che si è accumulata e questo è vero specialmente in logica, naturalmente, dove abbiamo questi risultati ottenuti deduttivamente.

La letteratura scelta per questo corso è solo un frammento di ciò che è stato scritto sulla nozione di conseguenza logica, ed i vari autori rappresentano posizioni distinte sull'argomento. Ma la letteratura non è vastissima se rapportata alla centralità del tema.[2]

Ora, le nozioni di conseguenza logica e di validità di un'inferenza sono centrali non solo in logica ma in tutta la filosofia, specialmente in filosofia teoretica, e sono presenti nelle discussioni intorno alla razionalità e alla conoscenza. Essere razionali significa, fra altre cose, avere ragioni (*grounds*) per ciò in cui uno crede. L'usuale analisi della conoscenza è quella platonica: si ha conoscenza quando si hanno opinioni vere e ragioni per queste opinioni. La nozione di ragione (base) per le proprie credenze è quindi una nozione chiave per molti concetti filosofici. Uno dei modi più comuni per ottenere ragioni o giustificazioni è fare inferenze: si ottiene una ragione per B, inferendo B da altre cose. Le inferenze giocano un ruolo cruciale nella discussione sulla conoscenza e la razionalità. Quando si parla di ragioni in questo contesto, facciamo affidamento su inferenze che sono buone in qualche senso, ma forse non logicamente valide. Il concetto di inferenza è più ampio di quello di inferenza valida in senso logico, e possiamo dire che un'inferenza logicamente valida è una inferenza che è massimamente buona. La cosa specifica di tale inferenza è che offre *ragioni conclusive*. Quando si parla di conoscenza in generale si richiede che le opinioni siano vere ma non si richiede sempre che le ragioni siano conclusive (*conclusive ground*). Questo è un concetto limite, un'inferenza valida in logica è qualcosa che offre ragioni conclusive per la conclusione, una volta che si hanno ragioni conclusive per le premesse.

C'è un certo scetticismo, forse non proprio in filosofia in generale, ma certo nella filosofia moderna sul fatto se vi siano ragioni conclusive. Io ritengo che questo scetticismo sia sbagliato e che non si possa dare una rappresentazione ragionevole della matematica se non si riconosce qualcosa che possiamo chiamare ragione conclusiva o dimostrazione.

[1] A. Tarski, 'On the Concept of Logical consequence', in *Logic, Semantics, Metamathematics*, 1956.

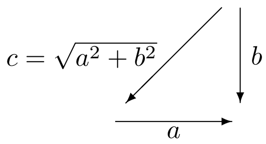
S. Shapiro, 'Logical Consequence and Model theory', in S. Shapiro (a cura di), *Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford UP, 2005.

J. Etchemendy, *Reflections on Consequence* non pubblicato, reperibile nel sito ufficiale dellautore), 1999.

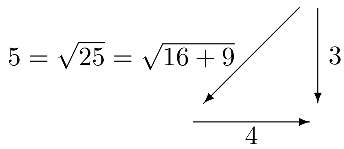
D. Prawitz, 'Logical Consequence from a Constructivist Point of View', in S. Shapiro (a cura di), *Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, pp. 671-695, Oxford UP, 2005.

[2] Un articolo in Italiano di Sebastiano Moruzzi e Elia Taddini dal titolo 'Conseguenza logica', è uscito recentemente in *Filosofia Analitica*, a cura di Annalisa Coliva, Carocci, 2007.

La matematica è una scienza molto antica che per migliaia di anni ha proceduto senza alcuna dimostrazione: i babilonesi conoscevano il teorema di Pitagora



ma non ne hanno data una dimostrazione. Già in Egitto era noto che



Questo è stato noto per migliaia di anni, due millenni a.C. i Babilonesi conoscevano questo, e ciò è chiaro dalle tavolette di argilla che sono state ritrovate. Avevano molte di queste tavole e conoscevano questa connessione sì che dati due lati potevano calcolare il terzo con precisione assoluta. Conoscevano questo, ma non lo provarono mai, neppure formularono il teorema. Ma poi qualcosa accadde nella matematica greca sì che tale connessione fu formulata ed anche dimostrata. Da quel momento in poi la matematica ha cambiato carattere ed ha assunto una delle sue caratteristiche peculiari: in matematica non si asserisce niente a meno che non se ne abbia una dimostrazione, questo è qualcosa di caratteristico della matematica. Non si può render conto della matematica se non abbiamo il concetto di dimostrazione o di ragione conclusiva: una dimostrazione è costruita da inferenze valide in questo senso logico, che conservano le ragioni conclusive.

Ciò non deve essere confuso con la questione se la matematica sia infallibile: in matematica come nelle scienze naturali si possono commettere errori. In matematica talvolta si pensa di aver dimostrato qualcosa, ma poi risulta che la conclusione è falsa o contraddittoria: ma allora non si dice, ho dimostrato qualcosa che poi è risultato non essere vero, ciò che si dice è che avevo pensato di avere una dimostrazione, ma poi è risultata non essere una dimostrazione affatto. Abbiamo una nozione di dimostrazione tale che quando si fanno errori, smette di essere una dimostrazione, non abbiamo dimostrato niente. Questo non ha niente a che fare con la questione di fare errori, nessuno dice che si è infallibili in matematica, piuttosto che vige questa idea di ragioni conclusive.

Riassumendo, il concetto di dimostrazione e di inferenza valida è tale da offrire ragioni conclusive per la conclusione, una volta date ragioni conclusive per le premesse. E a questo siamo interessati in logica e in filosofia della logica: cosa sono queste ragioni conclusive?

Si potrebbe dire che è un piccolo mistero che ci sia qualcosa di questo tipo. Ci possiamo chiedere, come può essere che conosciamo la lunghezza del terzo lato senza misurarlo, quale sorta di ragionamento o di magia ci permette di conoscere il terzo lato conoscendo solo gli altri due. Otteniamo conoscenza semplicemente eseguendo delle inferenze. Ed è anche misteriosa questa cogenza tipica di un'inferenza, l'idea è che quando facciamo un'inferenza non solo otteniamo conoscenza, ma sarebbe irrazionale non credere alla conclusione una volta che si crede alle premesse. Siamo forzati da un'inferenza valida, e non è certo ovvio come ciò possa occorrere.

Non è dunque sorprendente che in certi ambiti della filosofia si sia negato ciò, si pensi a Wittgenstein che ha negato che si sia obbligati ad asserire la conclusione di un'inferenza valida, ma che possiamo procedere come vogliamo. Certo questa è una posizione estrema. La sfida per la logica e la filosofia della logica è spiegare come otteniamo conoscenza facendo inferenze e da cosa dipenda questa loro cogenza.

0.0.1 Tre approcci

I maggiori contributi della logica moderna sulla nozione di validità di un'inferenza possono essere sintetizzati in tre punti.

- Il primo, già individuato da Aristotele, è l'analisi delle forme logiche: l'idea è che il concetto di conseguenza logica e di validità di un'inferenza hanno a che fare con le forme linguistiche e in particolare con le forme logiche. La logica ha creato linguaggi formali capaci di mettere in evidenza la forme logica. Abbiamo già visto in questo corso i linguaggi del primo ordine. Ed è caratteristico di Aristotele di distinguere certe forme.
- Il secondo contributo è dato dalla teoria della dimostrazione ove le inferenze vengono ridotte ad inferenze le più elementari possibile e in questo corso abbiamo già presentato la nozione di deduzione, in particolare che A è derivabile da Γ in un sistema deduttivo D: $\Gamma \vdash_D A$.
- Il terzo contributo è da individuarsi nella teoria dei modelli, all'interno della quale si definisce la nozione di verità in un modello, e si possono costruire contromodelli per le situazioni in cui A non segue dall'insieme Γ di premesse. In questo ambito viene introdotta una nozione tecnica di conseguenza logica; per dire che A è conseguenza logica dell'insieme Γ di premesse, scriveremo: $\Gamma \models A$

Faremo ora qualche altra considerazione di carattere storico riguardo a questi due ultimi punti per passare poi al tema principale di queste prime due lezioni, ovvero la discussione delle opere di Tarski, Shapiro, e Etchemendy. Le lezioni delle prossime due settimane saranno rivolte invece all'introduzione di un nuovo punto di vista, il mio personale, sulle nozioni di conseguenza logica e di validità di un'inferenza .

0.0.2 Schema delle posizioni di Tarski, Shapiro ed Etchemendy.

Consentitemi ora di fare un rapido sommario delle posizioni di Tarski, Shapiro e Etchemendy. Tutti e tre gli autori discutono quale sia la giusta analisi della nozione intuitiva di conseguenza logica e nel fare ciò si chiedono se le analisi in termini teoretico-deduttivi, $\Gamma \vdash_D A$ (*proof theoretical notion of logical consequence*) o in termini teoretico-modellistici, $\Gamma \models A$ (*model theoretical notion of logical consequence*) siano delle buone analisi.

	$\vdash$	$\models$
Tarski	No	Sì
Shapiro	Sì	Sì
Etchemendy	No	No
capro espiatorio di Shapiro	Sì	No

Tarski ritiene che l'analisi in termini teoretico-deduttivi sia sbagliata e che in termini teoretico-modellistici sia giusta. Shapiro ritiene invece che entrambe le analisi siano buone ed indipendenti l'una dall'altra, perché ci sono diverse intuizioni relative al concetto di conseguenza logica ed ognuna rende conto di queste diverse intuizioni. Etchemendy, d'altra parte, ritiene che entrambe le analisi siano per buona parte sbagliate: in particolare egli ritiene completamente erronea quella in termini teoretico-deduttivi. Potremmo domandarci se ci sia qualche sostenitore della posizione rimanente: tale posizione è il capro espiatorio dell'argomentazione di Shapiro; è la posizione contro la quale si sviluppa tutta la sua argomentazione. Non pensate tuttavia che si tratti della posizione da me difesa, nonostante mi sia occupato molto di teoria della dimostrazione. Il mio pensiero è più vicino a quello di Etchemendy: secondo la mia opinione entrambe le analisi non sono veramente buone. Per questo tenterò di dare una nuova analisi della nozione di conseguenza logica che prenderà elementi sia da ambedue le impostazioni, ma il cui punto di arrivo sarà per buona parte differente da esse.

0.0.3 Breve riflessione storica: Bolzano e Tarski

Voglio ora fare qualche riflessione storica sulle due analisi di conseguenza logica. La nozione teoretica-modellistica di conseguenza logica è la più antica: essa fu introdotta essenzialmente da Bernard Bolzano nel 1837 (*Wissenschaftlehre*), 99 anni prima di Tarski. La definizione di conseguenza logica di Bolzano si fonda sul concetto di sostituzione (S) delle espressioni di una proposizione: S sostituisce a ciascun termine non-logico un altro termine della stessa categoria, nomi per nomi, predicati per predicati, relazioni per relazioni e così via. Scrivendo Γ^S e A^S per indicare l'insieme di proposizioni e la proposizione ottenuti, rispettivamente, applicando la sostituzione S a Γ ed A, possiamo esprimere la definizione di conseguenza logica data da Bolzano nel seguente modo:

$$\Gamma \models_B A \text{ sse per ogni sostituzione } S\text{, se le proposizioni di } \Gamma^S \text{ sono vere, allora } \Gamma^S \text{ è vera}$$

Tarski, nell'articolo del 1936, ritiene insoddisfacente tale definizione perché se non ci sono abbastanza sostituzioni da fare, può risultare che $\Gamma \models_B A$ anche se da un punto di vista intuitivo A non è conseguenza logica di Γ.

Per Tarski non dobbiamo essere condizionati dai limiti espressivi del nostro linguaggio, dalla 'povertà' del linguaggio ed elabora una variante della definizione di Bolzano in cui compare la nozione di assegnazione di valori o interpretazione ($\mathcal{I}$). Invece di operare una sostituzione, Tarski procede assegnando significati specifici ai termini non-logici all'interno di una interpretazione e arriva alla formulazione:

$$\Gamma \models_T A \text{ sse per ogni } \mathcal{I}\text{, se le proposizioni di } \Gamma \text{ sono vere in } \mathcal{I}\text{, allora } A \text{ è vera in } \mathcal{I}.$$

Il concetto di interpretazione determina ciò che egli chiama modello $\mathcal{M}$, ove un modello $\mathcal{M}$ è determinato da un domino ed una interpretazione, $\mathcal{M} = \langle \mathcal{I}, d \rangle$. Nell'articolo del '36, Tarski non varia il dominio che dunque rimane fissato una volta per tutte, quindi possiamo dire che:

$$\Gamma \models_T A \text{ sse per ogni } \mathcal{I}\text{: se } \langle \mathcal{I}, d \rangle \text{ è un modello per } \Gamma\text{, allora } \langle \mathcal{I}, d \rangle \text{ è modello anche per } A,$$

Il tutto può essere riscritto utilizzando la nozione di verità in un modello:

$$\Gamma \models_T A \text{ sse se gli enunciati di } \Gamma \text{ sono veri in } \langle \mathcal{I}, d \rangle \text{ , allora } A \text{ è vera in } \langle \mathcal{I}, d \rangle.$$

Questa nozione di conseguenza logica è profondamente diversa dalla moderna nozione di conseguenza logica come definita in teoria dei modelli, poiché quest'ultima prende in considerazione tutti i possibili domini e recita

$$\Gamma \models A \text{ sse per ogni } \mathcal{I} \text{ ed ogni dominio } d\text{: se gli enunciati di } \Gamma \text{ sono veri in } \langle \mathcal{I}, d \rangle\text{, allora } A \text{ è vera in } \langle \mathcal{I}, d \rangle.$$

L'idea di conseguenza logica definita attraverso un sistema deduttivo D - A è conseguenza logica di Γ sse esiste una dimostrazione di A da Γ in D - possiamo considerarla come lo sviluppo dell'idea aristotelica ed euclidea di sistema assiomatico: in un tale sistema si stabiliscono assiomi e si individuano come teoremi quelli e solo quelli che seguono logicamente dagli assiomi. Certamente non possiamo usare sistemi assiomatici siffatti per definire la nozione di conseguenza logica: infatti potremmo solo dire che alcune cose sono date come conseguenza logica (assiomi) ed altre sono conseguenza logica se seguono logicamente dagli assiomi, ma chiaramente entriamo in un circolo. Proviamo quindi a sviluppare un'idea di sistema assiomatico nel quale vengono posti non solo gli assiomi ma anche le regole di inferenza. Prendiamo come esempio di regola di inferenza il *modus ponens*:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

Per evitare di entrare ancora in un circolo vizioso - qualora si voglia catturare l'idea di conseguenza logica attraverso tale sistema assiomatico - cosa sia un'applicazione di una regola di inferenza non deve essere qualcosa su cui occorra ragionare, se occorre ragionare se una particolare applicazione è una corretta applicazione di una inferenza, allora cadiamo di nuovo in circolo perché stiamo presupponendo cosa sia una inferenza logica. L'inferenza deve essere tale da essere sempre in grado di decidere, già guardando all'inferenza stessa, se si tratti di una corretta applicazione di una regola di inferenza o no. Questo è un requisito importante di un sistema deduttivo: le regole di inferenza sono date in modo tale che non occorre ragionare su cosa sia un loro caso particolare, un'applicazione di tale regola. Il primo a sviluppare questa idea in modo chiaro è stato Leibniz, ma certo Frege fu il primo a sviluppare un sistema deduttivo in questo modo.

Negli anni '20 l'opinione più diffusa tra i filosofi e i logici era che l'approccio teoretico-deduttivo ($\vdash$) fosse l'approccio più promettente al problema della validità delle inferenze e della conseguenza logica. Nel 1929, il teorema di completezza di Gödel, teorema secondo il quale se A è conseguenza logica di Γ allora A è anche derivabile da Γ in un sistema deduttivo, rafforzò sempre più l'idea che l'approccio deduttivo fosse quello appropriato per la definizione di validità di un'inferenza e di conseguenza logica. Per terminare questo breve *excursus* storico rimane da ricordare che negli anni '30 ci fu una forma di reazione a questa tendenza soprattutto in seguito al teorema di incompletezza di Gödel e all'analisi tarskiana di conseguenza logica all'interno della teoria dei modelli che si è imposta ed è stata molto influente.

0.0.4 Tarski

Come abbiamo già visto, nell'articolo del '36 Tarski non sembra far propria la definizione di conseguenza logica come si è soliti darla oggidì in teoria dei modelli:

$\Gamma \models A$ sse per ogni $\mathcal{I}$ ed ogni dominio d: se gli enunciati di γ sono veri in $\langle \mathcal{I}, d \rangle$, allora A è vera in $\langle \mathcal{I}, d \rangle$.

Infatti se ci limitiamo ai linguaggi del primo ordine, tale nozione è equiestensionale con la nozione di derivabilità grazie al teorema di completezza di Gödel del '29:

$$\Gamma \models A \qquad \text{sse} \qquad \Gamma \vdash A$$

Invece il punto di partenza dell'articolo del '36 è proprio la critica all'approccio teoretico-deduttivo. Si legge: "Qualche anno fa' ho dato un esempio assai semplice di teoria formale con la seguente caratteristica: fra i suoi teoremi occorrono enunciati come

$A(\underline{0})$. 0 possiede la proprietà P
$A(\underline{1})$. 1 possiede la proprietà P

E, in generale tutti gli enunciati particolari della forma

$A(\underline{n})$. n possiede la proprietà P
dove $\underline{n}$ sta per il simbolo che denota il numero naturale n in un dato sistema numerico (p.e. decimale). D'altra parte l'enunciato universale

$\forall x A(x)$. Ogni numero naturale possiede la proprietà P,
non può essere dimostrato nella teoria in questione per mezzo delle normali regole di inferenza.

Questo fatto sembra parlare da solo. Mostra come il concetto formale di conseguenza logica, come è generalmente inteso dai logici matematici, non coincida affatto col concetto comunemente inteso. Da un punto di vista intuitivo sembra certo che l'enunciato universale $\forall x A(x)$ segua nel senso usuale dalla totalità degli enunciati particolari $A(\underline{0}), A(\underline{1}), \ldots, A(\underline{n}), \ldots$ Infatti nel caso in cui tutti questi enunciati siano veri, l'enunciato A deve anche essere vero."

In altre parole Tarski sostiene che la nozione di conseguenza logica definita tramite la derivabilità non sia estensionalmente adeguata. Tarski continua poi la sua argomentazione dicendo che sarebbe inutile aggiungere una tale proposizione come assioma, perché si troverebbe un'altra proposizione del tipo visto prima, procedendo così all'infinito.

Uno si potrebbe chiedere quale sia davvero l'argomentazione di Tarski qui. Indubbiamente Tarski fa riferimento al linguaggio dell'aritmetica di Peano che contiene un simbolo per lo zero, l'operazione di successore, l'addizione, la moltiplicazione, l'identità. In modo molto schematico, esaminiamo vari tipi di modelli o classi di modelli.

- Il modello inteso $\mathcal{N}$ per il linguaggio dell'artitmetica. Tale modello è caratterizzato dal fatto che il dominio è costituito dai numeri naturali, il simbolo per lo zero viene interpretato su $\underline{0}$, l'operazione di addizione è la somma aritmetica come la conosciamo, il prodotto è il prodotto come lo conosciamo, l'operazione di successore è l'operazione da n a $n+1$. In tale modello $\mathcal{N}$ si ha che

  $$\text{se } \mathcal{N} \models \{A(\underline{n}) : n \geq 0\}, \text{ allora } \mathcal{N} \models \forall x A(x)$$

  grazie all'usuale interpretazione del quantificatore universale.

  e dunque

  $$\{A(\underline{n}) : n \geq 0\} \models \forall x A(x).$$

  Nessuna sorpresa che $\{A(\underline{n}) : n \geq 0\} \not\vdash A$, tenuto conto del teorema di incompletezza di Gödel dell'aritmetica: la proposizione G di Gödel è proprio una proposizione con queste caratteristiche.

- Consideriamo i modelli in cui il dominio è l'insieme dei numeri naturali, ma l'interpretazione varia. In questo caso possiamo considerare quella interpretazione $\mathcal{I}$ che interpreta la funzione di successore sulla funzione costante zero, quindi possiamo benissimo avere che $A(\underline{n})$ è vero per ogni n - semplicemente perché è vero $A(\underline{0})$ - e che $\forall x A(x)$ non sia vera, per cui $\{A(\underline{n}) : n \geq 0\} \not\models A$.

  L'aspetto problematico nella lettura di Tarski deriva proprio dal fatto che il ragionamneto che porta Tarski a sostenere che $\{A(\underline{n}) : n \geq 0\} \models A$ fa pensare che abbia in mente il modello inteso del linguaggio aritmetico, d'altra parte la definizione che dà a p.416-417 di conseguenza logica fa riferimento ad una molteplicità di interpretazioni relative ad uno stesso dominio, come abbiamo già visto:

  $\Gamma \models A$ sse per ogni $\mathcal{I}$, se gli enunciati di Γ sono veri in $\langle \mathcal{I}, d\rangle$, allora A è vera in $\langle \mathcal{I}, d\rangle$.

- Siamo liberali sul dominio e prendiamo l'universo. Ma anche qui andiamo incontro a difficoltà (messe in evidenza da Etchemendy) perché sicuramente sarà vero su tale dominio qualunque interpretazione scegliamo che 'esistono almeno due individui' e questa non sembra essere certo una verità logica.

  L'unica possibilità per Tarski sembrerebbe quella di far propria la definizione usuale in teoria dei modelli in cui i modelli hanno come dominio sottoinsiemi dell'universo:

  $\Gamma \models A$ sse per ogni $\mathcal{I}$ e per ogni dominio d, se gli enunciati di Γ sono veri in $\langle \mathcal{I}, d\rangle$, allora A è vera in $\langle \mathcal{I}, d\rangle$.

  ma per il teorema di completezza tale nozione - relativamente ai linguaggi del primo ordine - è equiestensionale alla derivabilità, che è proprio ciò che Tarski critica.

Tornando al linguaggio dell'aritmetica, Etchemendy sostiene nel suo libro[3] che Tarski considera tutti i simboli matematici come costanti logiche, cosicché non possono esserci diversi modelli ma

[3] J. Etchemendy, *The Concept of Logical consequence*, Harvard UP, 1990.

solamente $\mathcal{N}$: in questo modo però la nozione di conseguenza logica viene schiacciata su quella di implicazione materiale.

Ciò non significa però che un'altra strada non possa essere trovata per arrivare ai risultati ottenuti da Tarski con l'argomentazione poco convincente appena mostrata: se ci spostiamo alla logica del secondo ordine, possiamo definire il concetto di numero naturale, e si può mostrare che ci sono enunciati di questo tipo, tali che tutte le instanze numeriche sono dimostrabili, ma non la proposizione universale, ad esempio la proposizione G di Gödel. Ma nel linguaggio del secondo ordine tutti i termini sono termini logici, non c'è nulla da variare, e di nuovo la nozione di conseguenza logica viene schiacciata su quella di implicazione materiale. Etchemendy si occupa ampiamente di questo nel suo libro: è vero che nella logica del secondo ordine si può dire che la definizione di conseguenza logica data da Tarski riesca a catturare la nozione di conseguenza logica insita nella relazione $\{A(\underline{n}) : n \geq 0\} \models \forall x A(x)$, ma essa cattura contemporaneamente troppe cose, diventa una nozione troppo ampia. Si pensi ad esempio all'ipotesi del continuo. O l'ipotesi stessa o la sua negazione è conseguenza logica della logica del secondo ordine e questo è strano perché uno non si aspetta che l'ipotesi del continuo sia risolta dalla logica del secondo ordine.

In accordo con Etchemendy, ritengo che l'analisi in termini teoretico-deduttivi non sia una buona analisi della nozione di conseguenza logica, ma ritengo anche che Tarski non ne abbia data una buona argomentazione.

0.0.5 Shapiro

Shapiro inizia la sua argomentazione considerando diverse idee intuitive di conseguenza logica.

> $\Gamma \Rightarrow_M A$ sse è impossibile che tutte le proposizioni di Γ siano vere e A sia falsa

oppure, formulata positivamente:

> $\Gamma \Rightarrow_M A$ sse è necessario che se tutte le proposizioni di Γ sono vere anche A è vera.

Questa idea è di notevole importanza in quanto mette in evidenza la connessione necessaria tra Γ e A e proprio questa connessione è di solito sottolineata in ogni trattazione sulla conseguenza logica.

Shapiro considera poi una formulazione più moderna di questa accezione modale che fa uso del concetto di mondo possibile (W):

> $\Gamma \Rightarrow_W A$ sse per ogni w se tutte le proposizioni di Γ sono vere in w, allora A è vera in w.

Qui la connessione necessaria vista sopra (la conservazione della verità è necessaria) è espressa come invarianza rispetto ai mondi possibili: per ogni mondo possibile, se gli enunciati di Γ sono veri in un dato mondo, anche A lo è in quel mondo. A questo punto Shapiro osserva che queste idee sono degli ingredienti della nozione di conseguenza logica, ma non catturano completamente tale nozione. Ad esempio si consideri l'enunciato 'Marco è più pesante di Giulia'; ne segue che 'Giulia è più leggera di Marco'. Anche se in ogni mondo in cui Marco è più pesante di Giulia, Giulia è più leggera di Marco, non siamo disposti a dire che 'Giulia è più leggera di Marco' è conseguenza logica di 'Marco è più pesante di Giulia'. Quindi l'analisi in termini di mondi possibili è parziale.

Shapiro introduce quindi un approccio semantico alla nozione di conseguenza logica:

> $\Gamma \Rightarrow_S A$ sse la verità delle proposizioni di Γ garantisce la verità di A, in virtù del *significato dei termini* che occorrono in Γ e A.

L'idea centrale è qui che la conservazione della verità avvenga in virtù del significato dei termini non-logici. Tornando all'esempio di Marco e Giulia, la connessione tra le due proposizioni avviene, secondo questo approccio, in virtù del significato di 'più pesante' e 'più leggero', per cui la verità di 'Marco è più pesante di Giulia' garantisce la verità di 'Giulia è più leggera di Marco'. Anche questo approccio non ci è di aiuto nell'esame dell'esempio.

Shapiro considera poi una variante del punto di vista semantico, che chiama FS:

$\Gamma \Rightarrow_{FS} A$ sse la verità delle proposizioni di Γ garantisce la verità di A, in virtù del significato dei termini *logici* che occorrono in Γ e A.

Con questa formulazione riusciamo a sbarazzarci dell'esempio di Marco e Giulia, perché se si varia il significato di 'più pesante' e 'più leggero', che sono termini non-logici, allora può darsi il caso che la prima proposizione sia vera e la seconda falsa. Shapiro introduce poi un altro aspetto filosoficamente molto rilevante e connesso al modo con cui acquisiamo nuova conoscenza ed utilizza per indicarlo il simbolo R, che sta per 'razionalità':

$\Gamma \Rightarrow_{R} A$ sse è irrazionale sostenere che le proposizioni di Γ sono vere e che A è falsa.

Quindi aggiunge:

$$\Gamma \textit{ giustifica } A.$$

Questo approccio alla conseguenza logica ha in realtà due 'ingredienti': il primo ingrediente è che è irrazionale sostenere che gli enunciati di Γ siano veri e A falsa, il secondo è la giustificazione della verità di A sulla base della verità degli enunciati di Γ. Shapiro arriva quindi alle sesta e ultima idea sulla conseguenza logica, che chiama *Ded* ad indicare l'aspetto deduttivo della nozione:

$\Gamma \Rightarrow_{Ded} A$ sse c'è una derivazione di A da Γ mediante una catena di regole di inferenza legittime, *gap-free*, auto-evidenti.

In questo ultimo punto Shapiro non fa riferimento a sistemi deduttivi formalizzati, ma ad un procedimento deduttivo informale: procedendo da Γ, attraverso un numero di passi, ognuno dei quali è un'inferenza legittima, *gap-free*, auto-evidente, si arriva ad A. Ci si potrebbe domandare cosa significhi 'auto-evidente', ma Shapiro non discute tale nozione così come non dà una spiegazione di cosa significhi *gap-free*. Personalmente ritengo che se una regola è auto-evidente allora è anche legittima, cosicché il requisito di legittimità diventa ridondante. Shapiro presenta l'idea deduttiva di conseguenza logica come l'evoluzione di quella razionale: se tutti i passi della derivazione di A da Γ sono auto-evidenti, allora certamente sarebbe irrazionale sostenere che Γ sia vera ed A falsa. Tuttavia non ritengo che nella formulazione deduttiva sia altrettanto chiaro come Γ giustifichi A.

Citiamo infine anche una nozione 'mista' di conseguenza logica

$\Gamma \Rightarrow_{L-blend} A$ sse per ogni mondo w, la verità delle proposizioni di Γ in w, garantisce la verità di A in w, in virtù del significato dei termini logici,

su cui torneremo nella prossima lezione.