

Il principio di Induzione Matematica

prf.ssa Giovanna Corsi

11 luglio 2004

Il principio di induzione matematica è un metodo dimostrativo che *fa esplicito riferimento ai numeri naturali. ... Il riferimento che il principio di induzione fa ad un insieme particolare, quello dei numeri naturali, contrasta in apparenza col fatto che le dimostrazioni per induzione si incontrano nei pi diversi campi della matematica, ben al di là dell'aritmetica. ... È quindi dovuto alla pervasività dei numeri naturali come strumento di indagine il fatto che un risultato che li concerne diventi un metodo dimostrativo di uso così generale e frequente.* (Bellissima e Pagli, La verità trasmessa, p. 59)

Principio di Induzione Matematica

Definizione 1 (Principio di Induzione Matematica)

$$\frac{P(0) \quad \text{per ogni } n, P(n) \rightarrow P(n+1)}{\text{per ogni } n, P(n)}$$

Il principio di induzione matematica dice che per dimostrare che tutti i numeri naturali godono della proprietà P è sufficiente dimostrare due cose, che:

1. il numero 0 gode di P (BASE DELL'INDUZIONE);
2. per ogni n , se n gode di P , anche $n + 1$ ne gode, (PASSO DELL'INDUZIONE).

Il passo dell'induzione spesso si dimostra attraverso le seguenti tre mosse:

2. (a) si considera un generico k ;
(b) si assume che la proprietà P valga per k , (ipotesi di induzione);
(c) si dimostra che la proprietà P vale per $k + 1$.

Ovviamente se si vuol dimostrare che tutti i numeri naturali $\geq h$, godono della proprietà P è sufficiente dimostrare che:

1. il numero h gode di P , (base dell'induzione)
2. per ogni $n \geq h$, se n gode di P , anche $n + 1$ ne gode, (passo dell'induzione).

Principio di Induzione sul decorso dei valori

Definizione 2 (Principio di Induzione sul decorso dei valori)

$$\frac{P(0) \quad \text{per ogni } n, P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)}{\text{per ogni } n, P(n)}$$

Il principio di induzione sul decorso dei valori dice che per dimostrare che tutti i numeri naturali godono della proprietà P è sufficiente dimostrare che:

1. il numero 0 gode di P , (base dell'induzione)
2. per ogni n , se tutti i numeri minori o uguali a n godono di P , anche $n + 1$ ne gode, (passo dell'induzione).

Il passo dell'induzione sul decorso dei valori spesso si dimostra via le seguenti tre mosse :

2. (a) si considera un generico k ;
(b) si assume che la proprietà P valga per $0, 1, 2, \dots, k$, (ipotesi di induzione);
(c) si dimostra che la proprietà P vale per $k + 1$.

Il principio di induzione sul decorso dei valori è quello maggiormente usato quando si vuole dimostrare che tutte le formule godono di una certa proprietà P . In questo caso si sfrutta il fatto che ad ogni formula è associato un numero naturale, esattamente quello che esprime la sua lunghezza.

1. P vale per tutte le formule di lunghezza 0 (base);
2. per ogni n , se P vale per formule di lunghezza 0, 1 e... e n allora P vale per formule di lunghezza $n+1$ (passo);
3. Dunque, per ogni n , P vale per formule di lunghezza n ovvero
 P vale per ogni formula.

Principio di induzione sulla lunghezza delle formule

Nel caso specifico in cui si faccia una induzione sul decorso dei valori rispetto alla lunghezza delle formule questo schema argomentativo è passibile di riformulazioni. Una delle pi frequenti è la seguente, che prende il nome di *principio di induzione sulla lunghezza (o costruzione) delle formule*.

Definizione 3 (Principio di induzione sulla lunghezza delle formule)

1. P vale per tutte le formule atomiche (*Base*)
2. per ogni fbf A e B , se P vale per A e per B allora P vale anche per $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ (*Passo*)
3. Dunque P vale per ogni formula.

Di nuovo, il passo si dimostra solitamente attraverso le seguenti mosse :

1. si considerano due generiche formule A e B ;
2. si assume che la proprietà P valga per A e per B , (ipotesi di induzione)
3. si dimostra che la proprietà P vale per $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$.

È facile vedere come il principio per induzione sulla costruzione delle formule sia riconducibile a quello sul decorso dei valori. L'argomento appena visto è equivalente al seguente:

1. si considera un generico k ;
2. si assume che la proprietà P valga per formule di lunghezza $0, 1, 2, \dots, k$ (ipotesi di induzione);
3. si dimostra che la proprietà P vale per formule di lunghezza $k + 1$.

Sia C una formula di lunghezza $k + 1$. Per come sono state definite le formule, C ha (necessariamente) una delle seguenti forme:

$$\begin{aligned}
C &:= (\neg B) \\
C &:= (A \wedge B) \\
C &:= (A \vee B) \\
C &:= (A \rightarrow B) \\
C &:= (A \leftrightarrow B)
\end{aligned}$$

ove le sottoformule A e B hanno rispettivamente lunghezza minore o uguale a k .

Quindi per ipotesi di induzione, A e B , separatamente, godono della proprietà P . Se ora facciamo vedere che anche $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ godono di P , possiamo concludere che tutte le formule di lunghezza $k + 1$ godono di P .

Si veda *Numeri naturali e principio di induzione* di D.Palladino in *L'insegnamento della logica* (a cura di L.Ciarrapico e D.Mundici).

Molti esempi di applicazione del principio di induzione si trovano in: I.S. Sominskii, *Il metodo di induzione matematica*, Progresso Tecnico Editoriale, Milano, 1964, (trad.it. di *The Method of Mathematical Induction*, Boston, a sua volta traduzione della 5a ed. in lingua russa !!)

Alcuni esempi.

Problema 1. Indica con d_n l'ennesimo numero dispari; dunque $d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 5, d_5 = 7, \dots$

Fai vedere che $d_n = 2n - 1, n \geq 1$.

Dim.

Indichiamo con $P(n)$ l'asserzione $d_n = 2n - 1$.

1. $n = 1$ (Base)
 $P(1)$ vale. Infatti $d_1 = (2 \times 1) - 1 = 1$.
2. (a) Sia $n = k$, per un generico numero naturale $k \geq 1$. (Passo)
(b) Supponiamo che $d_k = 2k - 1$ (Ip. di induzione)
(c) Si ottiene allora che $d_{k+1} = d_k + 2 = (2k - 1) + 2 = 2k + 2 - 1 = 2(k + 1) - 1$.

Quindi per il principio di induzione matematica, per ogni n , $P(n)$.

Problema 2. Indica con Sd_n la somma dei primi n numeri dispari; dunque $Sd_1 = 1, Sd_2 = 1 + 3, Sd_3 = 1 + 3 + 5, \dots, Sd_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

Fai vedere che $Sd_n = n^2, n \geq 1$.

Dim.

Indichiamo con $P(n)$ l'asserzione $Sd_n = n^2$.

1. $n = 1$ (Base)
 $P(1)$ vale. Infatti $Sd_1 = 1^2 = 1$.
2. (a) Sia $n = k$, per un generico numero naturale $k \geq 1$. (Passo)
(b) Supponiamo che $Sd_k = k^2$ (Ip. di induzione)
(c) Si ottiene allora che $Sd_{k+1} = Sd_k +$ il $k + 1$ -esimo numero dispari $= Sd_k + 2(k+1) - 1 = Sd_k + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

Quindi per il principio di induzione matematica, per ogni $n, P(n)$.

Problema 3. Indica con S_n la somma dei numeri naturali $\leq n$.

Fai vedere che $S_n = n(n + 1)/2$.

Dim.

Indichiamo con $P(n)$ l'asserzione $S_n = n(n + 1)/2$.

1. $n = 0$ (Base)
 $P(0)$ vale. Infatti $S_0 = 0(0 + 1)/2 = 0$.
2. (a) Sia $n = k$, per un generico numero naturale k . (Passo)
(b) Supponiamo che $S_k = k(k + 1)/2$ (Ip. di induzione)
(c) Si ottiene allora che $S_{k+1} = S_k + (k+1) = k(k+1)/2 + (k+1) = (k + 1)(k + 2)/2$.

Quindi per il principio di induzione matematica, per ogni $n, P(n)$.

Problema 4. Dimostrare che, diviso il piano con n rette, si può colorare ciascuna regione in rosso o nero in modo che regioni adiacenti (con un segmento in comune) siano di colore diverso.

Dim. Esercizio.

Problema 5. Dimostra che ogni numero naturale $n \geq 2$ si può esprimere come prodotto di due numeri primi (prodotto che può ridursi ad un solo fattore).

Dim. (Per induzione sul decorso dei valori)

Indichiamo con $P(n)$ l'asserzione *se $n \geq 2$ allora esistono j numeri primi tali che $n = p_1 \times \dots \times p_j, j \geq 1$.*

1. $n = 2$ (Base)
 $P(2)$ vale. Poiché 2 è primo.
2. (a) Sia $n = k$, per un generico numero naturale $k \geq 2$. (Passo)
(b) Supponiamo che valga $P(2), P(3), P(4), \dots, P(k)$ (Ip. di induzione)
(c) Si consideri $k+1$. Se $k+1$ è primo, allora banalmente $P(k+1)$.

Se $k+1$ non è primo allora $k+1 = r \times s$ con $r, s \leq k$. Dunque per l'ipotesi induttiva r ed s si possono esprimere come prodotti di primi e allora, essendo un prodotto di prodotti ancora un prodotto, anche $k+1$ è un prodotto di primi.

Quindi per il principio di induzione matematica, per ogni n , $P(n)$.

Problema 6. Dimostra che in ogni *fbf* il numero delle parentesi chiuse è uguale al numero delle parentesi aperte.

Dim.

Indichiamo con $f_a[E]$ il numero delle parentesi aperte e con $f_c[E]$ il numero delle parentesi chiuse di E .

Facciamo vedere per induzione sulla costruzione delle formule, che per ogni *fbf* E , $f_a[E] = f_c[E]$.

1. E è atomica, ovvero $E := p$. (Base).
 $f_a[p] = 0 = f_c[p]$.
2. (a) Siano A e B due formule qualsivoglia. (Passo)

- (b) Assumiamo che $f_a[A] = f_c[A]$ e $f_a[B] = f_c[B]$. (Ip. di induzione)
- (c) Allora $f_a[(\neg A)] = 1 + f_a[A] =$ (per ip. di ind.) $= 1 + f_c[A] = f_c[(\neg A)]$
 $f_a[(A \wedge B)] = 1 + f_a[A] + f_a[B] =$ (per ip. di ind.) $= 1 + f_c[A] + f_c[B] = f_c[(A \wedge B)]$.

Analogamente,

$$f_a[(A \vee B)] = 1 + f_a[A] + f_a[B] = \text{(per ip. di ind.)} = 1 + f_c[A] + f_c[B] = f_c[(A \vee B)]$$

.....

Quindi per il principio di induzione matematica, per ogni $f b f E$, $f_a[E] = f_c[E]$.