Due esempi di inferenze per assurdo. Numeri ineffabili e diadi effabili.

La diagonale ed il lato di un quadrato non sono commensurabili

ne discende che

La lunghezza della diagonale di un quadrato non è un numero razionale

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la diagonale d ed il lato l siano commensurabili. Ne segue che esistono numeri naturali a e b tali che

$d = \frac{a}{b}\, l$, ove a e b sono primi fra loro.

Allora $d^2 = \frac{a^2}{b}^2\, l^2$

Dal fatto che $d^2 = 2l^2$, abbiamo

$2l^2 = \frac{a^2}{b^2}\, l^2$, da cui

$2 = \frac{a^2}{b^2}$

$2b^2 = a^2$, dunque a^2 è pari. Ma allora anche[1]

a **è pari**. Sia dunque $a = 2c$ per qualche c. Allora

$2b^2 = 4c^2$

$b^2 = 2c^2$, dunque b^2 è pari, ma allora anche

b **è pari** .

Dunque a e b sono entrambi pari in contraddizione col fatto di essere primi fra loro.

L'insieme dei numeri primi è infinito.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'insieme dei numeri primi non sia infinito e che $\Pi = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., p_n\}$ sia l'insieme, finito, di tutti i numeri primi.

Consideriamo il numero $k = (2 \times 3 \times \ldots \times p_n) + 1$. Ora k è primo oppure k non è primo. Ragioniamo dunque per distinzione di casi.

k è primo. Ma k è maggiore di tutti i numeri primi occorrenti in Π. Dunque Π non è l'insieme di tutti i numeri primi.

k non è primo. Allora per il teorema fondamentale dell'aritmetica della scomponibilità in fattori primi, k è divisibile per qualche numero primo. Tale numero primo, diciamo q, non è in Π perché k diviso per qualsiasi numero di Π dà come resto 1. Dunque Π non è l'insieme di tutti i numeri primi.

In entrambi i casi otteniamo che Π non è l'insieme di tutti i numeri primi, contrariamente a quanto avevamo assunto per assurdo. Concludiamo che l'insieme dei numeri primi è infinito.

Poniamo:

I:= L'insieme dei numeri primi è infinito.
X:= Π è l'insieme di tutti i numeri primi.
P:= k è un numero primo.
Il ragionamento sopra presentato poggia sulla seguente regola a tre premesse:

$$\frac{\neg I \to X \qquad \neg I \wedge P \to \neg X \qquad \neg I \wedge \neg P \to \neg X}{I}$$

Tale regola può essere così giustificata:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg I \to X$}
\AxiomC{$P \vee \neg P$}
\AxiomC{$\neg I \wedge P \to \neg X$}
\UnaryInfC{$P \wedge \neg I \to \neg X$}
\UnaryInfC{$P \to (\neg I \to \neg X)$}
\AxiomC{$\neg I \wedge \neg P \to \neg X$}
\RightLabel{\textit{scambio di premesse}}
\UnaryInfC{$\neg P \wedge \neg I \to \neg X$}
\RightLabel{\textit{legge dell'export}}
\UnaryInfC{$\neg P \to (\neg I \to \neg X)$}
\RightLabel{\textit{distinzione di casi}}
\BinaryInfC{$(P \vee \neg P) \to (\neg I \to \neg X)$}
\RightLabel{\textit{modus ponens}}
\BinaryInfC{$\neg I \to \neg X$}
\RightLabel{\textit{introduzione della congiunzione}}
\BinaryInfC{$\neg I \to (X \wedge \neg X)$}
\RightLabel{\textit{principio dell'assurdo}}
\UnaryInfC{I}
\end{prooftree}
$$

"... Ciascuno di essi conserva la freschezza e l'importanza di quando è stato scoperto: 2000 anni non vi hanno lasciato una ruga. Questa è una dimostrazione per *reductio ad absurdum*, e la *reductio ad absurdum*, tanto amata da Euclide, è una delle più belle armi di un matematico. E' un gambetto molto più raffinato di qualsiasi gambetto degli scacchi: un giocatore di scacchi può offrire in sacrificio un pedone o anche qualche altro pezzo, ma il matematico offre *la partita*." [da *Apologia di un matematico*, di Godfrey H.Hardy, p.73]

Digressione

Numeri ineffabili e diadi effabili
(da Imre Toth, *Lo schiavo di Menone*, Vita e Pensiero, 1998)

Dal *Menone* di Platone:

....

Socrate Se questo lato fosse di due piedi e lo stesso quest'altro, di quanti piedi sarebbe l'intera superficie ?

...

Schiavo Quattro, Socrate.

Socrate Non vi potrebbe essere un'altra superficie, doppia di questa ma simile, avente tutti i suoi lati uguali, come questa?

Schiavo Sì.

Socrate Di quanti piedi sarà?

Schiavo Otto.

Socrate Prova a dirmi allora quanto sarà lungo ciascun lato di essa. Il lato di questa è di due piedi; quant'è quello della superficie doppia?

"La convinzione che anima Socrate emerge nella penultima battuta (83 E 11 - 84 A 1) : *esiste* una misura 'esatta' del lato del quadrato doppio, *anche se non se ne può determinare il valore* con le operazioni di 'calcolo' (logizestai) della matematica tradizionale, che è quella pitagorica, dove l'irrazionale non è né può essere numero e misura." [da Toth, p. XV]

Misurare per *antanairesis*

Il ragionamento di Socrate percorre per un tratto il procedimento di misurazione di un segmento di retta, che Aristotele chiama *antanairesis*. [Menone, 82 E - 84 A]

Tale processo si basa sul fatto che due grandezze s_0 e d_0 (per semplicità assumiamo $s_0 < d_0 < 2s_0$) sono commensurabili sse lo sono i seguenti resti $(d_0 - s_0)$ e $(2s_0 - d_0)$.

Se $(d_0 - s_0) > (2s_0 - d_0)$, poniamo $d_1 = (d_0 - s_0)$ e $s_1 = (2s_0 - d_0)$, se $(d_0 - s_0) < (2s_0 - d_0)$, poniamo $s_1 = (d_0 - s_0)$ e $d_1 = (2s_0 - d_0)$.

In ogni caso abbiamo che $d_n = s_n + d_{n+1}$ e $s_n = s_{n+1} + d_{n+1}$, oppure $d_n = s_n + s_{n+1}$ e $s_n = s_{n+1} + d_{n+1}$.

Quindi se per qualche n, s_{n+1} e d_{n+1} sono commensurabili, lo sono anche s_0 e d_0 e $d_0 = k \times s_{n+1}$, per qualche k intero.[2]

Misurare la diagonale di un quadrato prendendo il lato come unità di misura

Dato un quadrato di lato s_0 e di diagonale d_0, col processo antanairetico si determina una successione infinita di resti per difetto e per eccesso $\langle s_n, d_n \rangle$, $n \leq 0$, ove $s_0(d_0)$ è il lato (la diagonale) del quadrato di partenza e $s_n(d_n)$, $n > 0$, è il lato (la diagonale) del quadrato che si ottiene all' n-esimo passo del processo antanairetico.

Se si prende s_0 come unità di misura possiamo individuare due successioni di razionali che approssimano per difetto e per eccesso $2^\star$ (la misura di d_0). Si fa vedere facilmente che

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= d_n - s_n \\ d_{n+1} &= 2s_n - d_n. \end{aligned}$$

Allora abbiamo (ponendo $s_0 = 1$)

[2] Al passo 0, s_0 è l'unità di misura e d_0 il segmento da misurare. Al passo 1, s_0 viene diviso in due segmenti di cui il più piccolo diviene (la prossima) unità di misura rispetto a cui il più grande viene misurato, e così via finché non si trova un s_n, se esiste, che viene scomposto in due segmenti di cui uno è multiplo esatto dell'altro.

$s_1 = d_0 - s_0$ $d_1 = 2s_0 - d_0$	$s_1 = d_0 - s_0$	$d_0 = s_0 + s_1$	$d_0 > 1$
$s_2 = d_1 - s_1$ $d_2 = 3d_0 - 4s_0$	$s_2 = 3s_0 - 2d_0$	$2d_0 = 3s_0 + s_2$	$d_0 < 3/2$
$s_3 = d_2 - s_2$ $d_3 = 10s_0 - 7d_0$	$s_3 = 5d_0 - 7s_0$	$5d_0 = 7s_0 + s_3$	$d_0 > 7/5$
$s_4 = d_3 - s_3$ $d_4 = 17d_0 - 24s_0$	$s_4 = 17s_0 - 12d_0$	$12d_0 = 17s_0 - s_4$	$d_0 < 17/12$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

$$1 \quad 7/5 \quad 41/29 \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad 2^\star \quad \leftarrow \quad \leftarrow \quad 99/70 \quad 17/12 \quad 3/2$$

DIADI EFFABILI

E' ben vero che non esistono numeri naturali n e m tali che

$$(n^2 - 2m^2) = 0$$

ma possiamo approssimare tale situazione al meglio; ovvero esistono numeri naturali n e m tali che

$$|n^2 - 2m^2| = 1$$

Definiamo la successione delle diadi effabili:

$[D_0,\, S_0] = [1, 1]$

$[D_{k+1},\, S_{k+1}] = [D_k + 2S_k,\, D_k + S_k]$. Ne segue

$$[D_0,\, S_0] = [1,\, 1]$$

$$[D_1,\, S_1] = [3,\, 2]$$

$$[D_2,\, S_2] = [7,\, 5]$$

$$[D_3,\, S_3] = [17,\, 12]$$

$$[D_4,\, S_4] = [41,\, 29]$$

$$[D_5,\, S_5] = [99,\, 70]$$

$$\cdots\cdots$$

D_{2k} approssima **per difetto** la diagonale del quadrato di lato S_{2k}.
D_{2k+1} approssima **per eccesso** la diagonale del quadrato di lato S_{2k+1}.

$$(D_{2k})^2 < 2\,(S_{2k})^2 \qquad (D_{2k+1})^2 > 2\,(S_{2k+1})^2$$

1	$7/5$	$41/29$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$2^\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$99/70$	$17/12$	$3/2$
[1, 1]	[7, 5]	[41, 29]	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$2^\star$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	[9, 70]	[17, 12]	[3, 2]

Nota. Se si indica con s_{k+1} lo scarto tra il *valore vero* della diagonale del quadrato di lato s_k ed il suo valore approssimato d_k, vediamo che

$s_0 > s_1 > s_2 > ...$

Infatti l'area dello gnomone, differenza tra d_k^2 e $(d_0\, s_k)^2$, è sempre uguale al quadrato unitario e quindi la sua base diminuisce con l'aumentare della lunghezza dei lati dei quadrati.

“Ma ecco che i Pitagorici hanno scoperto che l’antanairesi della diagonale d e del lato s di un quadrato Q - equivalente al processo di misurazione del lato s^* del quadrato duale Q^* da parte del lato s - genera per necessità intrinseca la succesione infinita dei numeri D_n e S_n delle diadi Δ_n. E quando Proclo, dando un resoconto dettagliato di questa scoperta parla del *teorema elegante (glafuron) dei Pitagorici*, il suo complimento era ed è sempre perfettamente giustificato.

La scoperta di questa analogia di struttura fra Numero e Figura, fra il mondo chiuso delle diagonali effabili Δ_n - discendenti dalla diade monadica Δ_1 e l’universo inifnito dei quadrati Q_n - generati dall’antanairesi inifinita del lato s_0 e dalla diagonale d_0 di un quadrato iniziale Q_0 - dovette costituire alla sua epoca un evento matematico inatteso, un risultato di una novità assolutamente sorprendente.” [p. 45].

“La perfetta traducibilità del linguaggio geometrico nell’idioma aritmetico, che ci offre il teorema elegante dei Pitagorici, ha a buon titolo affascinato Teone, Giamblico e Proclo. Il teorema non si limita ad essere elegante, ma cela una ricchezza di idee matematiche, la cui straordinaria efficacia e il cui accattivante significato sono divenuti evidenti non prima dell’Ottocento, con l’elaborazione dell’algebra moderna. In effetti quello che hanno scoperto i Pitagorici è un’identità di struttura puramente algebrica o, in termini tecnici, l’*isomorfismo* del mondo chiuso delle diadi Δ_n e dell’universo autonomo, e altrettanto chiuso in sè, delle figure geometriche dei quadrati antanairetici Q_n.” [pp.59-60]