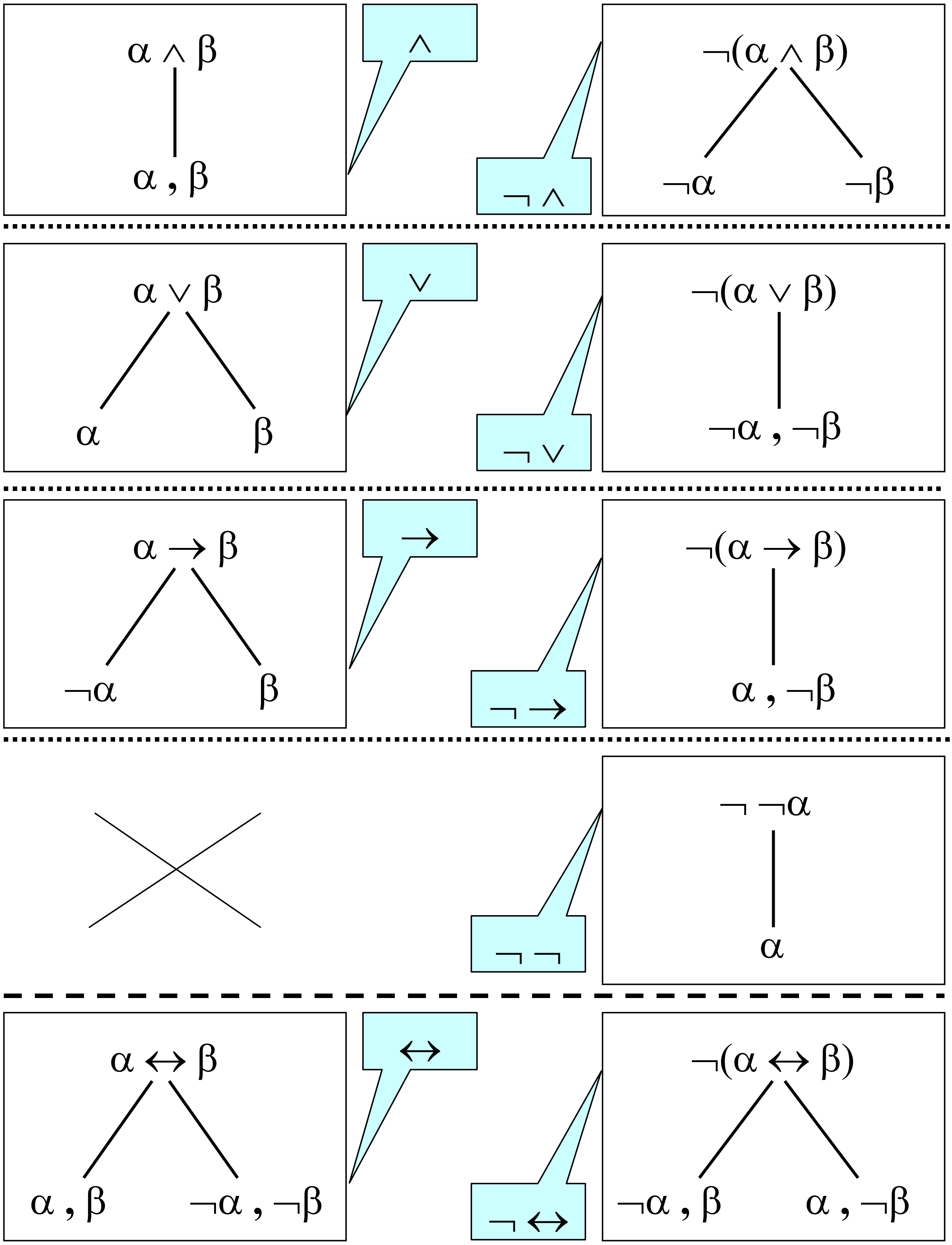
TAVOLE DI BETH

REGOLE DI COSTRUZIONE / LIVELLO ENUNCIATIVO



TAVOLE DI BETH / Esempio 1

$\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$ **è una tautologia?**
Inizio una tavola di Beth <u>con la sua negazione</u>, $\neg[\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)]$

❶

$\neg[\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)]$

applico la regola $\boxed{\neg\to}$ alla formula $\neg[\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)]$, e la "marco" con ✓.

❷

$\neg[\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)]$ ✓

|

$\alpha\ ,\ \neg(\beta \to \alpha \wedge \beta)$

applico la regola $\boxed{\neg\to}$ alla formula $\neg(\beta \to \alpha \wedge \beta)$, e la "marco" con ✓.

❸

$\neg[\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)]$ ✓

|

$\alpha\ ,\ \neg(\beta \to \alpha \wedge \beta)$ ✓

|

$\beta\ ,\ \neg(\alpha \wedge \beta)$

applico la regola $\boxed{\neg\wedge}$ alla formula $\neg(\alpha \wedge \beta)$, e la "marco" con ✓.

❹

$\neg[\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)]$ ✓

|

$\alpha\ ,\ \neg(\beta \to \alpha \wedge \beta)$ ✓

|

$\beta\ ,\ \neg(\alpha \wedge \beta)$ ✓

/ \

$\neg\alpha$ × $\neg\beta$ ×

♣ la tavola è completata: tutte le formule analizzabili sono già marcate, ossia sono già state analizzate.
♣ la tavola è *chiusa* perché ciascuno dei suoi <u>due</u> rami è *chiuso* (×): quello di sinistra contiene sia α che $\neg\alpha$; quello di destra sia β che $\neg\beta$.
♣ concludo che la formula $\alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$, la cui negazione è all'inizio della tavola, *non può avere controesempi*.
E' una tautologia.

TAVOLE DI BETH / Esempio 2

$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \to \alpha$ **è una tautologia?**
Inizio una tavola di Beth <u>con la sua negazione</u>, $\neg[(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \to \alpha]$.

❶

$$\neg[(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \to \alpha]$$

applico la regola $\boxed{\neg\to}$ alla formula $\neg[(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \to \alpha]$, e la "marco" con ✓.

❷

$$\neg[(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \to \alpha] \ ✓$$
$$|$$
$$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \ , \ \neg\alpha$$

applico la regola $\boxed{\wedge}$ alla formula $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta$, e la "marco" con ✓.

❸

$$\neg[(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \to \alpha] \ ✓$$
$$|$$
$$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \ ✓ \ , \ \neg\alpha$$
$$|$$
$$\alpha \vee \beta \ , \ \neg\beta$$

applico la regola $\boxed{\vee}$ alla formula $(\alpha \vee \beta)$, e la "marco" con ✓.

❹

$$\neg[(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \to \alpha] \ ✓$$
$$|$$
$$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \ ✓ \ , \ \neg\alpha$$
$$|$$
$$\alpha \vee \beta \ ✓ \ , \ \neg\beta$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\alpha \qquad\qquad \beta$$
$$\times \qquad\qquad \times$$

♣ la tavola è completata: tutte le formule analizzabili sono già marcate, ossia sono già state analizzate.
♣ la tavola è *chiusa* perché ciascuno dei suoi <u>due</u> rami è *chiuso* (×): quello di sinistra contiene sia α che $\neg\alpha$; quello di destra sia β che $\neg\beta$.
♣ concludo che la formula $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta \to \alpha$, la cui negazione è all'inizio della tavola, *non può avere controesempi*.
E' una tautologia.

TAVOLE DI BETH / Esempio 3

$((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$ **è una tautologia?** Inizio una tavola di Beth <u>con la sua negazione</u>.

$\neg[((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))]$

per $\boxed{\neg\rightarrow}$

$\neg[((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))]$ ✓

|

$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$, $\neg(\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$

per $\boxed{\neg\vee.}$

$\neg[((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))]$ ✓

|

$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$, $\neg(\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$ ✓

|

$\neg\alpha$, $\neg(\beta \vee \gamma)$

per $\boxed{\neg\vee.}$

$\neg[((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))]$ ✓

|

$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$, $\neg(\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$ ✓

|

$\neg\alpha$, $\neg(\beta \vee \gamma)$ ✓

|

$\neg\beta$, $\neg\gamma$

per $\boxed{\vee.}$

$\neg[((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))]$ ✓

|

$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ ✓ , $\neg(\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$ ✓

|

$\neg\alpha$, $\neg(\beta \vee \gamma)$ ✓

|

$\neg\beta$, $\neg\gamma$

/ \

$\alpha\vee\beta$ $\qquad$ γ

per $\boxed{\vee.}$

$\neg[((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))]$ ✓

|

$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ ✓ , $\neg(\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$ ✓

|

$\neg\alpha$, $\neg(\beta \vee \gamma)$ ✓

|

$\neg\beta$, $\neg\gamma$

/ \

$\alpha\vee\beta$ ✓ $\qquad$ γ ×

/ \

α × $\qquad$ β ×

primo ramo $\qquad$ secondo ramo $\qquad$ terzo ramo

♣ la tavola è completata: tutte le formule analizzabili sono già marcate, ossia sono già state analizzate.
♣ la tavola è *chiusa* perché ciascuno dei suoi <u>tre</u> rami è *chiuso* (×)
♣ concludo che la formula
$((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$
è una tautologia.

TAVOLE DI BETH / Esempio 4

$(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)$ **è una tautologia?**
Inizio una tavola di Beth <u>con la sua negazione</u>, $\neg[(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)]$

❶

$$\neg[(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)]$$

applico la regola $\boxed{\neg\to}$ alla formula $\neg[(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)]$, e la "marco" con ✓.

❷

$$\neg[(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)] \checkmark$$

$$\alpha \to \beta \;,\; \neg(\beta \to \alpha)$$

applico la regola $\boxed{\neg\to}$ alla formula $\neg(\beta \to \alpha)$, e la "marco" con ✓.

❸

$$\neg[(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)] \checkmark$$

$$\alpha \to \beta \;,\; \neg(\beta \to \alpha)\checkmark$$

$$\beta \;,\; \neg\alpha$$

applico la regola $\boxed{\to}$ alla formula $\alpha \to \beta$, e la "marco" con ✓.

❹

$$\neg[(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)] \checkmark$$

$$\alpha \to \beta \checkmark \;,\; \neg(\beta \to \alpha)\checkmark$$

$$\beta \;,\; \neg\alpha$$

$$\neg\alpha \qquad\qquad\qquad \beta$$

$$\bigcirc \qquad\qquad\qquad \bigcirc$$

♣ <u>la tavola è ora completata</u>: tutte le formule analizzabili sono già marcate, ossia sono già state analizzate.
♣ la tavola ***non è chiusa*** perché almeno uno (di fatto, entrambi) dei suoi rami è *aperto* (○).
♣ concludo che la formula $(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)$, la cui negazione è all'inizio della tavola, *ammette contro-esempi* e quindi **non è una tautologia**.
♣ sia il primo che il secondo ramo aperto forniscono l'assegnazione

$$\alpha = \mathbf{0}\;,\; \beta = \mathbf{1}$$

<u>sotto la quale</u> – come si verifica usando le tavole di verità – <u>la nostra formula risulta **falsa**</u>.

Tavole di Beth / livello elementare

Regole di analisi.

Alle sette regole relative ai connettivi ($\wedge$, $\neg\wedge$, $\vee$, $\neg\vee$, $\rightarrow$, $\neg\rightarrow$, $\neg\neg$) si aggiungono le quattro seguenti, relative ai quantificatori e suddivise in:

- regole di *esemplificazione* (analisi di un universale vero / di un esistenziale falso);
- regole di *esposizione* (analisi di un esistenziale vero / di un universale falso).

	regole di *esemplificazione*	**regole di *esposizione***	
$\forall$	$\forall x\alpha$ $\vert$ $\alpha[x/a]$ **a qualsiasi**	$\neg\forall x\alpha$ $\vert$ $\neg\alpha[x/a]$ **a "nuova"**	$\neg\forall$
$\neg\exists$	$\neg\exists x\alpha$ $\vert$ $\neg\alpha[x/a]$ **a qualsiasi**	$\exists x\alpha$ $\vert$ $\alpha[x/a]$ **a "nuova"**	$\exists$

Ricordiamo che con $\alpha[x/a]$ si indica la formula risultante da α per sostituzione di *ogni occorrenza libera* della variabile individuale x con la costante individuale a.

- ♣ Nella applicazione di una regola di esemplificazione, la costante individuale con la quale si effettua l'esemplificazione può essere scelta *a piacere* fra quelle già presenti nella tavola (ovviamente, se ce n'è almeno una; in caso contrario la dobbiamo introdurre *ex novo*).
- ♣ Invece, nella applicazione di una regola di esposizione, la costante individuale con la quale si effettua l'esposizione deve essere *"nuova"*, ossia deve essere *diversa da tutte quelle eventualmente già presenti nella tavola*.

Costruzione e "uso" delle tavole.

Scelta una o più formule di partenza, la costruzione di una tavola per questa o queste formule si sviluppa, come nel caso enunciativo, per passi successivi. Ciascun passo consiste nell'applicazione di una delle 11 regole di analisi a una formula nella tavola. Una tavola si dice *chiusa* quando tutti i suoi rami sono *chiusi*, e un ramo della tavola si dice *chiuso* quando, per una qualche formula β, esso contiene sia β che la sua negazione $\neg\beta$. Una tavola si dice *aperta* quando non è chiusa.

Rispetto al caso enunciativo vi è però una fondamentale differenza, relativa a quando una tavola può dirsi completata (ossia, a quando può dirsi rappresentare una *analisi esaustiva* delle condizioni iniziali). Precisamente:

- ♣ **Nel caso enunciativo**
  una tavola è *completata* quando ogni formula analizzabile in essa occorrente è stata analizzata una volta. Ricordiamo quanto convenuto per tener conto di questo fatto: una volta analizzata (cioè, una volta applicata ad essa una delle 7 regole di analisi) una formula viene marcata con un contrassegno (p.es. ✓) per indicare che non occorre più riprenderla in considerazione; quando tutte le formule analizzabili di una tavola sono marcate la tavola è detta essere *completata*.
  Si può dimostrare che la costruzione di una qualsiasi tavola ha termine, dopo un numero finito di passi, in una tavola completata.
  Pertanto:
  per ogni "costruzione di tavola" a partire da una o più formule date sono in linea di principio possibili solo due casi, ciascuno dei quali esclude l'altro:
  [caso a] **la costruzione raggiunge, dopo un numero finito di passi, una tavola chiusa (non importa che sia anche completata);**
  [caso b] **la costruzione raggiunge, dopo un numero finito di passi, una tavola completata e aperta.**
  Si ha così una procedura *effettiva, meccanica*, per decidere in un numero finito di passi, data una qualunque formula α del linguaggio enunciativo, se α è una tautologia oppure no:

  TEOREMA 1. Sia α una formula del linguaggio enunciativo, e si costruisca una tavola a partire da $\neg\alpha$. Allora:
  - *se si dà il caso (a)*, ossia se si è raggiunta una tavola chiusa $T[\neg\alpha]$, allora α è una tautologia;
  - *se si dà il caso (b)*, ossia se si è raggiunta una tavola completata e aperta $T[\neg\alpha]$, allora α non è una tautologia (e da ciascun ramo aperto di $T[\neg\alpha]$ si può estrarre una valutazione sotto la quale α è falsa).

- ♣ **Nel caso elementare invece**
  una tavola è *completata* (l'analisi delle condizioni iniziali è *esauriente*) quando:
  (a) ogni formula analizzabile in essa occorrente è stata analizzata almeno una volta, e
  (b) ogni formula della forma $\forall x\alpha$ e $\neg\exists x\alpha$ (cioè ogni formula da analizzare *per esemplificazione*) in essa occorrente è stata esemplificata con tutte le costanti individuali presenti nella tavola.

La ragione alla base della richiesta al punto (b) è la seguente. Se $\forall x\alpha$ è vera, allora ciascun individuo del dominio soddisfa la condizione $\alpha(x)$, e dunque sicuramente $\alpha[x/a]$ deve essere vera per ogni nome a presente nella tavola al momento in cui $\forall x\alpha$ viene analizzata. Successivamente, lo sviluppo della tavola può comportare (a causa delle regole di *esposizione*) l'introduzione di *nuovi* nomi; e se vogliamo davvero compiere una analisi *esauriente*, dobbiamo riconsiderare alla luce di questo "ampliamento del dominio" le conseguenze della verità di $\forall x\alpha$, esemplificandola nuovamente con tutte le costanti non disponibili al momento dell'ultima sua esemplificazione. Non facendolo, infatti, rischieremmo di non individuare una possibile contraddizione (p.es., tra una $\neg\alpha[x/b]$ già presente nella tavola e una $\alpha[x/b]$ ottenibile per riesemplificazione di $\forall x\alpha$) e di rendere così la nostra analisi non esauriente. Per quanto riguarda gli esistenziali falsi, il discorso è del tutto analogo.

Consideriamo per esempio la formula $\alpha = \exists x[P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$, e proponiamoci di mostrare, con il metodo di Beth, che α non può essere mai falsa, ossia che è una legge logica. L'idea è, come sappiamo, quella di assumere che α sia *falsa* (ossia, che *la sua negazione sia vera*) e poi di trarre sistematicamente e esaurientemente tutte le conseguenze di questa assunzione: se in ogni circostanza risultante da questa analisi arriveremo a una contraddizione (cioè, se ogni ramo della tavola completata è chiuso), vorrà dire che *non è logicamente possibile che α sia falsa*, e quindi concluderemo che α è una legge logica.

$\neg\exists x[P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$	inizio della tavola
$\mid$	
$\neg[P(a) \rightarrow \forall y P(y)]$	*esemplificazione* ($[\neg\exists]$) di $\neg\exists x[P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$ con a
$\mid$	
$P(a)$, $\neg\forall y P(y)$	regola $[\neg \rightarrow]$ applicata a $\neg[P(a) \rightarrow \forall y P(y)]$
$\mid$	
$\neg P(b)$	*esposizione* ($[\neg\forall]$) di $\neg\forall y P(y)$ con b nuova
$\circ$	**il ramo è aperto**

"ogni formula analizzabile della tavola è stata analizzata, e l'unico ramo della tavola è aperto", potremmo pensare, "e dunque abbiamo trovato un 'mondo' in cui $\neg\exists x[P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$ è vera, ossia un controesempio a $\exists x[P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$: questa non è una legge logica".
<u>Così non è</u>, e l'errore nasce dal ritenere questa analisi *esauriente*: non lo è, perché nell'ultimo passo si è introdotta una nuova costante b, e quindi la verità di $\neg\exists x[P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$ va riconsiderata alla luce di questo nuovo fatto: anche $\neg[P(b) \rightarrow \forall y P(y)]$ deve essere vera. Ma allora:

$\neg\exists x[P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$	inizio della tavola
$\mid$	
$\neg[P(a) \rightarrow \forall y P(y)]$	*esemplificazione* ($[\neg\exists]$) di $\neg\exists x[P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$ con a
$\mid$	
$P(a)$, $\neg\forall y P(y)$	regola $[\neg \rightarrow]$ applicata a $\neg[P(a) \rightarrow \forall y P(y)]$
$\mid$	
$\neg P(b)$	*esposizione* ($[\neg\forall]$) di $\neg\forall y P(y)$ con b nuova
$\mid$	
$\neg[P(b) \rightarrow \forall y P(y)]$	*riesemplificazione* ($[\neg\exists]$) di $\neg\exists x[P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$ con b
$\mid$	
$P(b)$, $\neg\forall y P(y)$	regola $[\neg \rightarrow]$ applicata a $\neg[P(b) \rightarrow \forall y P(y)]$
$\times$	**l'unico ramo è chiuso, perché contiene $P(b)$ e $\neg P(b)$**

Ora la tavola è completata nel senso della definizione data, ed è chiusa. Si conclude che $\exists x[P(x) \rightarrow \forall y P(y)]$ *è una legge logica*.

Dunque, <u>operativamente</u>, nella costruzione di una tavola di Beth al livello elementare procediamo così: marchiamo con un contrassegno *solo* le formule alle quali è stata applicata una regola di analisi diversa da $[\forall]$ e $[\neg\exists]$: queste formule non sarà necessario prenderle in considerazione nuovamente. Invece, <u>non marchiamo</u> le formule alle quali è stata applicata una regola di esemplificazione, cioè $[\forall]$ oppure $[\neg\exists]$: se, nel corso dello sviluppo della tavola, si presenta una costante individuale con la quale non sono state ancora esemplificate, <u>dovremo infatti *riesemplificarle* con quella costante</u>.
Tutto questo dà luogo a una situazione del tutto nuova rispetto a quanto avviene al livello enunciativo:

- ♠ **non è detto che la costruzione di una tavola (a partire da una certa formula) termini sempre, dopo un numero finito di passi, in una tavola completata: vi sono casi in cui lo sviluppo prosegue all'infinito senza mai raggiungere una tavola completata;**

pertanto:

- ♠ **per ogni "costruzione di tavola" a partire da una o più formule date sono ora in linea di principio possibili <u>tre</u> casi, ciascuno dei quali esclude l'altro:**
  - **[caso a] la costruzione raggiunge, dopo un numero finito di passi, una tavola chiusa (non importa che sia anche completata);**
  - **[caso b] la costruzione raggiunge, dopo un numero finito di passi, una tavola completata e aperta;**
  - **[caso c] la costruzione prosegue all'infinito, senza mai raggiungere una tavola completata.**

Si dimostra:

TEOREMA 2 . Sia α una formula di un linguaggio elementare, e si costruisca una tavola a partire da $\neg\alpha$. Allora:

- *se si dà il caso (a)*, ossia se dopo un numero finito di passi la costruzione raggiunge una tavola chiusa, allora α è una *legge logica elementare* (non ci possono essere "mondi" nei quali essa è falsa);
- *se si dà il caso (b)*, ossia se dopo un numero finito di passi la costruzione raggiunge una tavola completata e aperta, α *non è una legge logica elementare* (ci sono "mondi" nei quali essa è falsa, e li si può estrarre dai rami aperti);
- *se si dà il caso (c)*, ossia se la costruzione prosegue all'infinito senza mai raggiungere una tavola completata e aperta, α *non è una legge logica elementare* (ci sono "mondi" nei quali essa è falsa, e - in un senso che andrebbe precisato - li si può estrarre dalla costruzione infinita).

E' di fondamentale importanza osservare che, sebbene il darsi di uno dei casi (b) e (c) comporti la stessa risposta circa lo "status logico" di α (ossia: α *non è una legge logica*), il modo in cui questa stessa risposta viene "fornita" è radicalmente diverso nei due casi. In ogni stadio finito $\boldsymbol{T_i}$ della analisi alla Beth per una certa formula α (cioè in ogni stadio finito della costruzione di una tavola con $\neg\alpha$ iniziale: $\{\neg\alpha\} = \boldsymbol{T}_0 \Rightarrow \boldsymbol{T_1} \Rightarrow \boldsymbol{T_2} \Rightarrow \boldsymbol{T_3} \Rightarrow \ldots$) possiamo sempre **riconoscere** se $\boldsymbol{T_i}$ è *chiusa* [caso (a)] oppure è *completata e aperta* [caso (b)]; <u>in generale</u> però **non possiamo riconoscere** se, non dandosi né il caso (a) né il caso (b), la costruzione *andrà ancora avanti all'infinito* [caso (c)] *oppure no*: quanto "sappiamo" allo stadio $\boldsymbol{T_i}$ <u>in generale</u> non permette di escludere né che si arrivi prima o poi a un termine, né che non lo si raggiungerà mai*.

Per meglio comprendere questo fenomeno, si immagini un "gioco" così fatto. Un tale, X, viene fatto scendere - gradino dopo gradino, a partire dal primo - lungo una scala S (preparata da chi organizza il gioco) che può essere di due tipi:

tipo I: *finita,* e in questo caso, l'ultimo gradino reca scritta la lettera a o la lettera b, oppure;

tipo II: *infinita*, e in questo caso nessun gradino porta una scritta.

Stabiliamo che X <u>vince</u> il gioco in un solo caso:

(a) arriva su un gradino con su scritta a;

mentre <u>perde</u> il gioco in tutti gli altri casi, ossia:

(b) arriva su un gradino con su scritta b, oppure

---

* <u>in generale</u> ... : non c'è un metodo effettivo e uniforme per stabilire, dato un qualunque stadio T_i dello sviluppo di una tavola, per il quale non si dà né il caso (a) né il caso (b), se la costruzione della tavola avrà termine oppure no; **questo non esclude però che**, **in certi casi particolari**, si riesca a stabilire - ragionando su ciò che stiamo facendo - che la costruzione della tavola andrà avanti all'infinito senza mai chiudersi né raggiungere una tavola completata. Si veda più avanti l'esempio numero 4 della tavola per $\forall x \exists y R(x,y) \rightarrow \exists y \forall x R(x,y)$.

(c) la scala è infinita.

X conosce le regole del gioco (in particolare, sa che un gradino con su scritta a oppure b è l'ultimo della scala), ma ovviamente non sa di che tipo sia la scala S che sta scendendo.

Supponiamo ora che al tempo t il tale X sia arrivato al gradino S_t. Guarda il gradino, e se vede scritto a si ferma e reclama correttamente di aver vinto, mentre se vede scritto b si ferma e ammette correttamente di aver perso. Se non vede scritto niente, in generale non può concludere correttamente né che ha vinto ("e se stessi scendendo lungo una scala di tipo II?") né che ha perso ("e se scendendo ancora un pò trovassi l'ultimo gradino?"): l'unica cosa che può fare è continuare a scendere.

Dunque:

- ♦ non ci sono casi dubbi: o X vince il gioco oppure X perde il gioco (se si vuole: *l'organizzatore del gioco sa già quale dei due casi si dà*);
- ♦ X questo lo sa, **tuttavia nel corso del gioco (ossia, a ogni istante finito del gioco) egli potrà solo riconoscere che ha vinto, *se davvero ha vinto*, ma in generale non che ha perso, *se davvero ha perso*****.

Morale per il metodo delle tavole di Beth al livello logico elementare:

- ♣ a differenza di quanto avviene al livello enunciativo (Teorema 1), al livello elementare il metodo delle tavole di Beth non ci dà una procedura per *decidere* in un numero finito di passi, circa ogni data formula α, se α è o meno una legge logica; ci dà solo (Teorema 2) una procedura che per ogni α permette di *verificare* (*riconoscere correttamente*, *certificare*) in un numero finito di passi che α è una legge logica, *se α è una legge logica*.
- ♣ Quanto finora detto lascia ancora aperta la possibilità che tale incapacità a decidere la proprietà di essere una legge logica elementare sia da imputarsi a un "difetto" del metodo delle tavole di Beth in quanto tale, e che quindi ci possano essere metodi alternativi più efficaci, cioè in grado di decidere in modo effettivo tale proprietà. Che così non sia fu stabilito da A. Church (1936) con il fondamentale *Teorema di indecidibilità della logica elementare*: non può esistere alcun metodo effettivo in grado, per ogni formula elementare α, di decidere in un numero finito di passi se α è una legge logica oppure non lo è.

  Abbiamo dunque a che fare con una **limitazione intrinseca al concetto di legge logica elementare**: questo concetto è essenzialmente più complesso del concetto di legge logica enunciativa (tautologia).

** in generale non . . . : vedi la nota *.

Nota bene:

- ♥ **in questo gioco:** X può sapere (nel senso di: *sapere dopo un tempo finito*) di aver perso solo se la scala è finita e l'ultimo gradino porta scritta b.
- ♥ **nella costruzione di una tavola che inizia con $\neg\alpha$:** si può sapere che α non è una legge logica quando si arriva a una tavola completata e aperta (v. esempio 3, e esercizio 2), oppure nei casi particolari in cui si riesce a provare che quella costruzione prosegue all'infinito (v. nota * e esempio 4).

Quattro esempi.

Esempio 1:

$\neg\forall x P(x) \to \exists x \neg P(x)$ è una legge logica.

$\neg[\neg\forall x P(x) \to \exists x \neg P(x)]$	inizio
$\mid$	
$\neg\forall x P(x)\,,\ \neg\exists x\neg P(x)]$	$[\neg \to]$ applicata alla formula iniziale
$\mid$	
$\neg P(a)$	$[\neg\forall]$: *esposizione* di $\neg\forall x P(x)$
$\mid$	
$\neg\neg P(a)$	$[\neg\exists]$: *esemplificazione* di $\neg\exists x\neg P(x)$
$\mid$	
$P(a)$	$[\neg\neg]$ applicata a $\neg\neg P(a)$
$\times$	**la tavola è chiusa**

NOTA BENE:
Si può ovviamente "riscrivere" la tavola con una *metavariabile* α al posto di $P(x)$, e concludere che $\neg\forall x\alpha(x) \to \exists x\neg\alpha(x)$ è una legge logica o, più correttamente, **uno "schema di legge logica".**

Sia detto una volta per tutte:

(1) uno *schema* (*di formula*) è una espressione schematica costruita con metavariabili per formule $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, metavariabili per variabili individuali $(x, y, z, \ldots)$, metavariabili per termini individuali $(t, s, r, \ldots)$ e simboli logici: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall, \exists$ (e, eventualmente $=$).

(2) scrivere 'α' oppure '$\alpha(x)$' è sostanzialmente la stessa cosa. Scrivendo $\alpha(x)$ si vuole semplicemente indicare/ricordare che la variabile x *può* occorrere libera in α; analogamente per $\alpha(x, y)$, ecc.

(3) dato uno schema X e un linguaggio elementare $\mathcal{L}$, le *istanze di X in $\mathcal{L}$* sono tutte e sole le formule di $\mathcal{L}$ che si ottengono da X rimpiazzandovi le metavariabili per formule con formule di $\mathcal{L}$, le metavariabili per variabili individuali con variabili individuali, le metavariabili per termini individuali con termini individuali di $\mathcal{L}$ (e, ovviamente, rimpiazzando occorrenze diverse di una stessa metavariabile con (occorrenze della) stessa espressione di $\mathcal{L}$).

(4) uno schema X *è uno schema di legge logica* (ma quando è chiaro cosa si indende diremo anche, brevemente: *X è una legge logica*) quando ogni istanza di X in un qualsiasi linguaggio elementare $\mathcal{L}$ è una legge logica di $\mathcal{L}$ (ossia, è vera in ogni "mondo" per $\mathcal{L}$).

Esempio 2: $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ è una legge logica.

$\neg[\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)]$		inizio
$\mid$		
$\exists x(P(x) \wedge Q(x))\,,\ \neg(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$		$[\neg \to]$ applicata alla formula iniziale
$\mid$		
$P(a) \wedge Q(a)$		$[\exists]$: *esposizione* di $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
$\mid$		
$P(a)\,,\ Q(a)$		$[\wedge]$ applicata a $P(a) \wedge Q(a)$
$/$	$\backslash$	
$\neg\exists x P(x)$	$\neg\exists x Q(x))$	$[\neg\wedge]$ applicata a $\neg(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$
$\mid$	$\mid$	
$\neg P(a)$	$\mid$	$[\neg\exists]$: *esemplificazione* di $\neg\exists x P(x)$ / ramo sin.
$\times$	$\neg Q(a))$	$[\neg\exists]$: *esemplificazione* di $\neg\exists x Q(x)$ / ramo dx
	$\times$	**la tavola è chiusa**

N.B.: Come nell'esempio 1, si può "riscrivere" la tavola con una metavariabile α al posto di $P(x)$ e una metavariabile β al posto di $Q(x)$, concludendo che lo schema $\exists x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \rightarrow \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$ è una legge logica (uno schema di legge logica).

Esempio 3: $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ <u>non è</u> una legge logica.

$\neg[\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))]$	inizio
$\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)\,,\ \neg\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$[\neg \rightarrow]$
$\exists xP(x)\,,\ \exists xQ(x)$	$[\wedge]$
$P(a)$	$[\exists]$: *esposizione* di $\exists xP(x)$
$Q(b)$	$[\exists]$: *esposizione* di $\exists xQ(x)$
$\neg(P(a) \wedge Q(a))$	$[\neg\exists]$: *esemplificazione* di $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ con a
$\neg(P(b) \wedge Q(b))$	$[\neg\exists]$: *esemplificazione* di $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ con b
$\neg P(a)$ | $\neg Q(a)$	$[\neg \wedge]$ applicata a $\neg(P(a) \wedge Q(a))$
$\times$	il ramo sinistro si è chiuso
$\neg P(b)$ | $\neg Q(b)$	$[\neg \wedge]$ applicata a $\neg(P(b) \wedge Q(b))$
$\circ$ $\times$	**la tavola è completata e aperta**

Dal ramo aperto (il secondo da sinistra) estraiamo il seguente 'mondo' nel quale la formula $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ è *falsa*:

- Dominio (universo del discorso): l'insieme $\{\underline{a}, \underline{b}\}$
- significato della costante individuale a: l'individuo $\underline{a}$
- significato della costante individuale b: l'individuo $\underline{b}$
- significato (estensionale) del predicato unario P: l'insieme $\{\underline{a}\}$
- significato (estensionale) del predicato unario Q: l'insieme $\{\underline{b}\}$.

N.B.: Si può "riscrivere" la tavola con una metavariabile α al posto di $P(x)$ e una metavariabile β al posto di $Q(x)$, concludendo che lo schema $\exists x\alpha \wedge \exists x\beta \rightarrow \exists x(\alpha(x) \wedge \beta(x))$ non è una legge logica (uno schema di legge logica). $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ è una istanza di questo schema (sul linguaggio elementare $\mathcal{L}$ determinato dalle costanti predicative unarie P e Q) che non è legge logica di $\mathcal{L}$, come testimonia il "mondo" sopre definito.

Esempio 4: $\forall x\exists yR(x,y) \to \exists y\forall xR(x,y)$ non è una legge logica.
(per ragioni di spazio, scriveremo a volte più esemplificazioni in uno stesso rigo)

$\neg[\forall x\exists yR(x,y) \to \exists y\forall xR(x,y)]$	inizio
$\vert$	
$\forall x\exists yR(x,y)\,,\ \neg\exists y\forall xR(x,y)$	[$\neg\to$] applicata alla formula iniziale
$\vert$	
$\exists yR(a_1,y)$	[$\forall$]: *esemplificazione* di $\forall x\exists yR(x,y)$ con a_1
$\vert$	
$\neg\forall xR(x,a_1)$	[$\neg\exists$]: *esemplificazione* di $\neg\exists y\forall xR(x,y)$ con a_1
$\vert$	
$R(a_1,a_2)$	[$\exists$]: *esposizione* di $\exists yR(a_1,y)$ con a_2, nuova
$\vert$	
$\neg R(a_3,a_1)$	[$\neg\forall$]: *esposizione* di $\neg\forall xR(x,a_1)$ con a_3, nuova
$\vert$	
$\exists yR(a_2,y)\,,\exists yR(a_3,y)$	[$\forall$]: *(ri)esemplificazione* di $\forall x\exists yR(x,y)$ con a_2 e a_3
$\vert$	
$\neg\forall xR(x,a_2)\,,\ \neg\forall xR(x,a_3)$	[$\neg\exists$]: *(ri)esemplificazione* di $\neg\exists y\forall xR(x,y)$ con a_2 e a_3
$\vert$	
$R(a_2,a_4)$	[$\exists$]: *esposizione* di $\exists yR(a_2,y)$ con a_4, nuova
$\vert$	
$R(a_3,a_5)$	[$\exists$]: *esposizione* di $\exists yR(a_3,y)$ con a_5, nuova
$\vert$	
$\neg R(a_6,a_2)$	[$\neg\forall$]: *esposizione* di $\neg\forall xR(x,a_2)$ con a_6, nuova
$\vert$	
$\neg R(a_7,a_3)$	[$\neg\forall$]: *esposizione* di $\neg\forall xR(x,a_3)$ con a_7, nuova
$\vert$	
$\exists yR(a_4,y),\ldots,\exists yR(a_7,y)$	[$\forall$]: *(ri)esemplificazione* di $\forall x\exists yR(x,y)$ con $a_4,\ldots,a_7$
$\vert$	
$\neg\forall xR(x,a_4),\ldots,\neg\forall xR(x,a_7)$	[$\neg\exists$]: *(ri)esemplificazione* di $\neg\exists y\forall xR(x,y)$ con $a_4,\ldots,a_7$
$\vert$	
$\vdots$	$\vdots$

In questo caso, non per applicazione di un qualche metodo meccanico uniforme - che non può esistere - bensì in base a un ragionamento sul caso specifico in questione, è facile dimostrare ("vedere" !) che non si arriverà mai né a un completamento né a una chiusura della tavola, ossia che **si dà il caso (c)**. Concludiamo che $\forall x\exists yR(x,y) \to \exists y\forall xR(x,y)$ non è una legge logica (e anche, come sopra, che lo schema $\forall x\exists y\alpha \to \exists y\forall x\alpha$ non è legge logica).

Esercizi.

1. Applicando il metodo delle tavole di Beth, *certificare* che tutti i seguenti schemi sono leggi logiche (sottinteso: elementari).
Suggerimento: per quelli di forma $\alpha \leftrightarrow \beta$, invece di fare un'unica tavola e usare le regole di Beth per il bicondizionale, conviene fare vedere che tanto $\alpha \to \beta$ quanto $\beta \to \alpha$ sono leggi logiche.

$\forall x \forall y \alpha \to \forall y \forall x \alpha$

$\exists x \forall y \alpha \to \forall y \exists x \alpha$

$\forall x \alpha \leftrightarrow \neg \exists x \neg \alpha$

$\neg \forall x \alpha \leftrightarrow \exists x \neg \alpha$

$\exists x \alpha \leftrightarrow \neg \forall x \neg \alpha$

$\neg \exists x \alpha \leftrightarrow \forall x \neg \alpha$

$\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \to (\forall x \alpha \to \forall x \beta)$

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha \to \forall x \beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \to \beta(x)) \\ (\alpha \to \exists x \beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha \to \beta(x))\end{array}\right\} \text{purché } x \text{ non sia libera in } \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l}(\forall x \alpha \to \beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha(x) \to \beta) \\ (\exists x \alpha \to \beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha(x) \to \beta)\end{array}\right\} \text{purché } x \text{ non sia libera in } \beta$$

$\forall x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \leftrightarrow \forall x \alpha \wedge \forall x \beta$

$\exists x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \to \exists x \alpha \wedge \exists x \beta$

$\forall x \alpha \vee \forall x \beta \to \forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))$

$\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \leftrightarrow \exists x \alpha \vee \exists x \beta$

$\forall x \alpha \to \alpha[x/a]$, a costante individuale

$\alpha[x/a] \to \exists x \alpha$, a costante individuale

$\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \wedge \forall x(\beta(x) \to \gamma(x)) \to \forall x(\alpha(x) \to \gamma(x))$

2. Applicando il metodo delle tavole di Beth, *concludere* che nessuno dei seguenti schemi è una legge logica, e ricavare un mondo-controesempio per una qualche istanza dalla tavola.

$(\forall x \alpha \to \forall x \beta) \to \forall x(\alpha(x) \to \beta(x))$

$\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \to \forall x \alpha \vee \forall x \beta$

$\neg \exists x \alpha \to \forall x \alpha$

$\alpha[x/a] \to \forall x \alpha$

$\exists x \alpha \to \alpha[x/a]$

$\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \wedge \neg \exists x(\beta(x) \wedge \gamma(x)) \to \exists x(\alpha(x) \wedge \gamma(x))$

$\exists x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \wedge \forall x(\beta(x) \to \gamma(x)) \to \exists x(\alpha(x) \wedge \neg \gamma(x))$

Per chi è interessato, il metodo delle tavole di Beth per la *logica elementare* <u>*con identità*</u> si ottiene da quello per la logica elementare apportando le seguenti integrazioni e modifiche:

(1) si aggiunge una nuova regola di analisi, $[RL]$ (*regola di Leibniz*):

$$\begin{array}{ccc} & \alpha[x/t] & \\ / & & \backslash \\ \neg t = s & & \alpha[x/s] \end{array} \qquad (t, s \text{ termini individuali})$$

(2) si amplia la definizione di *ramo chiuso* (e, conseguentemente, di *tavola chiusa*):
un ramo è chiuso quando o contiene una qualche formula β assieme alla sua negazione $\neg\beta$, oppure quando contiene una qualche formula della forma $\neg t = t$ (con t termine individuale).

Si dimostra allora un teorema analogo al Teorema 2:

TEOREMA 3 . Sia α una formula di un linguaggio elementare con identità, e si costruisca una tavola a partire da $\neg\alpha$. Allora:
- se dopo un numero finito di passi la costruzione raggiunge una tavola chiusa, allora α è una *legge della logica elementare con identità* (non ci possono essere "mondi" nei quali essa è falsa, e il predicato $=$ è interpretato sulla relazione di *identità* nell'universo del discorso);
- se dopo un numero finito di passi la costruzione raggiunge una tavola completata e aperta, α *non è una legge della logica elementare con identità* (ci sono "mondi" nei quali essa è falsa, ecc., e li si può estrarre dai rami aperti);
- se la costruzione prosegue all'infinito senza mai raggiungere una tavola completata e aperta, α *non è una legge della logica elementare con identità* (ci sono "mondi" nei quali essa è falsa, ecc., e - in un senso che andrebbe precisato - li si può estrarre dalla costruzione infinita).

Un solo esempio: $\forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \to x = z)$, *legge di transitività dell'identità*.

$$\begin{array}{ll}
\neg\forall x\forall y\forall z(x = y \land y = z \to x = z) & \text{inizio} \\
\quad | & \\
\neg\forall y\forall z(a = y \land y = z \to a = z) & [\neg\forall]\text{: } \textit{esposizione} \text{ di } \neg\forall x\forall y\forall z(x = y \land y = z \to x = z) \\
\quad | & \\
\neg\forall z(a = b \land b = z \to a = z) & [\neg\forall]\text{: } \textit{esposizione} \text{ di } \neg\forall y\forall z(a = y \land y = z \to a = z) \\
\quad | & \\
\neg(a = b \land b = c \to a = c) & [\neg\forall]\text{: } \textit{esposizione} \text{ di } \neg\forall z(a = b \land b = z \to a = z) \\
\quad | & \\
a = b \land b = c\, , \neg a = c & [\neg \to] \\
\quad | & \\
a = b\, , b = c & [\land] \\
\quad / \quad \backslash & \\
\neg b = a \qquad a = c & [RL] \text{ applicata a } b = c, \text{ ossia } (x = c)[x/b] \\
/ \quad \backslash \qquad\quad \times & \text{(un ramo si è chiuso)} \\
\neg a = b \quad \neg b = b & [RL] \text{ applicata a } \neg b = a, \text{ ossia } \neg(b = x)[x/a] \\
\times \qquad\quad \times & \text{N.B.: il secondo ramo chiude perché contiene } \neg b = b \\
 & \textbf{la tavola è chiusa}
\end{array}$$

NOTA BENE

Nelle pagine precedenti, per semplicità, abbiamo supposto *tacitamente* di avere a che fare con linguaggi elementari **privi di funtori**. Ovviamente, in tali linguaggi l'insieme dei *termini individuali chiusi* coincide con l'insieme delle costanti individuali.
Se vogliamo estendere la procedura alla Beth (e i relativi Teoremi 1, 2, 3) al caso generale (cioè, a linguaggi elementari qualsivoglia, anche contenenti costanti funtoriali) è *necessario* integrare quanto detto nel modo seguente:

(a) le *esemplificazioni* possono essere fatte non solo con costanti individuali presenti nella tavola, ma anche con termini individuali chiusi costruiti, a partire da costanti individuali presenti nella tavola, per mezzo di funtori del linguaggio;

(b) una tavola è completata quando ciascuna formula esemplificabile in essa presente è stata esemplificata *in tutti i modi ora possibili* (ossia, non solo con ciascuna costante individuale presente nella tavola, ma anche con ciascun termine individuale chiuso che si può costruire, a partire da costanti individuali presenti nella tavola, per mezzo di funtori del linguaggio).

Questo significa che se, per esempio, il linguaggio della formula per la quale stiamo facendo la tavola contiene un funtore unario f^1 e un funtore binario g^2, e nella tavola disponiamo delle costanti individuali a e b, allora le esemplificazioni possibili sono non solo con a e b, ma anche con (gli infiniti termini individuali) $f^1(a)$, $f^1(f^1(a))$, $\ldots$, $f^1(b)$, $f^1(f^1(b)), \ldots$, $g^2(a,a)$, $g^2(a,b)$, $g^2(b,a)$, $g^2(b,b)$, $g^2(f^1(a),a)$, $g^2(b,f^1(a))$, $g^2(g^2(a,a), g^2(a,b))$, $\ldots$, $f^1(g^2(g^2(a,a), g^2(a,b)))$, $\ldots\ldots$

Esempio (i): $\forall x P(x) \to P(f(a))$ è una legge logica.

$\neg[\forall x P(x) \to P(f(a))]$	inizio
$\vert$	
$\forall x P(x)\,,\ \neg P(f(a))$	$[\neg \to]$
$\vert$	
$P(a)$	$[\forall]$: *esemplificazione* di $\forall x P(x)$ con a
$\vert$	
$P(f(a))$	$[\forall]$: *riesemplificazione* di $\forall x P(x)$ con $f(a)$
$\times$	**la tavola è chiusa**

Esempio (ii): $\forall x \exists y (y = f(x))$ è una legge logica.

$\neg \forall x \exists y (y = f(x))$	inizio
$\vert$	
$\neg \exists y (y = f(a))$	$[\neg\forall]$: *esposizione* di $\neg \forall x \exists y (y = f(x))$ con a
$\vert$	
$\neg\ a = f(a)$	$[\neg\exists]$: *esemplificazione* di $\neg \exists y (y = f(a))$ con a
$\vert$	
$\neg\ f(a) = f(a)$	$[\neg\exists]$: *riesemplificazione* di $\neg \exists y (y = f(a))$ con $f(a)$
$\times$	**la tavola è chiusa**