Da *Mathematical Logic* di W.V.O. Quine, 1958.

INTRODUZIONE

La logica MATEMATICA differisce dalla logica formale tradizionale così significativamente nel metodo e la supera così tanto in potenza e raffinatezza da essere generalmente e non ingiustificatamente considerata una nuova scienza. I suoi inizi sono da collocarsi con George Boole, alla metà dello scorso secolo. Frammenti anticipatori della logica matematica risalgono a molto prima di Boole - invero fino a Leibniz; ma fu da Boole in poi attraverso Peirce, Schröder, Frege, Peano, Whitehead, Russell ed i loro successori che la logica matematica è passata attraverso uno sviluppo continuo ed è divenuta un capitolo rispettabile della conoscenza.

La logica formale tradizionale che risale ad Aristotele per il suo nucleo essenziale è pur tuttavia la progenitrice diretta della logica matematica. Le differenze eclatanti fra le due non devono farci mettere in ombra che esse sono entrambe 'logica', nel senso più pregante del termine. Entrambe si occupano, parlando in modo generale, degli stessi argomenti. Ma quali siano questi argomenti non è facile da dire; le caratterizzazioni usuali della logica quale 'scienza dell'inferenza necessaria', 'scienza delle forme', ecc., sono abbastanza poco informative per essere considerate delle vere risposte.

Se però spostiamo la nostra attenzione dagli argomenti al vocabolario, è facile tracciare una distinzione immediata fra le verità della logica e gli enunciati veri di altro genere. Un'enunciato logicamente vero ha questa peculiarità: particelle fondamentali come 'è', 'non', 'e', 'o', 'a meno che', 'se', 'allora', 'né', 'alcuni', 'tutti', ecc. vi occorono in modo tale che esso è vero indipendentemente dalle altre sue componenti. Così, consideriamo l'esempio classico:

(1) Se ogni uomo è mortale e Socrate è uomo allora Socrate è mortale.

Non solo questo enunciato è vero, ma è vero indipendentemente dalle componenti 'uomo', 'mortale' e 'Socrate'; nessuna variazione di queste componenti è in grado di trasformarlo in una falsità. Ogni altro enunciato della forma:

(2) Se ogni — è — e — è un — allora — è —

è ugualmente vero, purché il primo e quarto spazio siano riempiti con una stessa parola, così come il secondo e l'ultimo, come pure il terzo e quinto. Una verità logica ancora più semplice è:

(3) Socrate è mortale o Socrate non è mortale;

variando 'Socrate' e 'mortale' non possiamo trasformarlo in un'enunciato falso.

Una parola è detta occorrere *essenzialmente* in un enunciato se la sua sostituzione con un'altra è in grado di trasformare quell' enunciato in una falsità. Quando questo non è il caso, la parola è detta occorrere *vacuamente*. Così le parole 'Socrate' e 'uomo' occorrono essenzialmente nell'enunciato 'Socrate è uomo', poiché 'Bucefalo è un uomo' e 'Socrate è un cavallo' sono false; d'altra parte 'Socrate ' e 'mortale' occorrono vacuamente in (3), e 'Socrate', 'uomo' e 'mortale' occorrono vacuamente in (1). Le verità logiche allora sono descrivibili come quelle verità in cui solo le particelle fondamentali cui abbiamo fatto riferimento prima occorrono essenzialmente.

Queste particelle costituiscono il *vocabolario logico*. Esse sono fondamentali in ogni discorso. Se ci accingessimo, ad es., a specificare un vocabolario per la geologia, dovremmo includere non solo parole come 'morena', 'faglia', ecc., ma anche l'intero vocabolario logico; e similmente per ogni altra disciplina. Parimenti le verità della logica possono essere annoverate fra le verità della geologia, e fra le verità dell'economia, ecc. Questo dà un senso al detto che il campo d'indagine della logica è universale, e che la logica è il denominatore comune delle varie scienze particolari.

Le parole che costituiscono il vocabolario logico possono essere ridotte in modo considerevole, perché possiamo parafrasare alcune di esse con l'aiuto delle altre. Il significato di 'a meno che', per es., è adeguatamente espresso da 'o'; ancora l'uso combinato di 'né... né' e 'non' , nella forma 'né non .... né non' è una parafrasi adeguata di 'e'. Quando questo tipo di riduzione è spinto al limite, il vocabolario logico si riduce a comprendere solo 'è' e 'né ... né' e uno strumento che corrisponde più o meno alla parola 'ogni', insieme ad un certo tipo di pronomi che sono di ausilio a questo ultimo strumento.

Ciò che comunemente va sotto il nome di logica matematica o logica formale tradizionale include, invero, non solo verità logiche nel senso qui proposto - verità che coinvolgono essenzialmente solo il vocabolario logico - ma anche enunciati *intorno* a tali verità. E' usuale includere nell'ambito della logica non solo enunciati del tipo (1) e (3), ma anche enunciati come questo:

(4) Ogni enunciato della forma (2) è vero purché il primo e quarto spazio siano riempiti con la stessa parola, così come il secondo e l'ultimo, ed il terzo e quinto.

Questo libro in particolare consiste in gran parte di enunciati del tipo (4). Dobbiamo dunque distinguere due accezioni di logica, uno più ampio ed uno più stretto; logica nel senso più stretto comprende quelle verità che contengono in modo essenziale solo il cosiddetto vocabolario logico, mentre la logica nel senso più ampio include sia la logica in senso stretto che il discorso intorno ad essa. Il discorso dell'ultimo tipo è classificabile, in gran parte almeno, sotto il titolo di *sintassi formale*. Negli anni il termine 'logica' è stato applicato ovviamente ad un ampio ambito di altri argomenti, quali la retorica, la psicologia, l'epistemologia, la metafisica; ma non cercherò di trovare un principio unificante fra questi usi del termine logica così distanti tra loro.

Nella precedente caratterizzazione delle verità logiche, abbiamo dato per scontata la nozione *generale* di verità. Abbiamo distinto le verità logiche dalle altre semplicemente specificando quali parole occorrono essenzialmente nelle verità logiche. Ora la nozione generale di verità, centrale com'è a problemi filosofici la cui soluzione sembra sfuggire ad ogni tentativo, può apparire come cosa davvero troppo grande per essere presa per scontata. Il ripudio della 'verità con la V maiuscola', è un modo prediletto di professarsi in linea con i più intransigenti. In realtà non viene mai negato che sappiamo cosa significhi dire che un dato enunciato è vero - assolutamente Vero - proprio così chiaramente come comprendiamo l'enunciato stesso. Le circostanze sotto cui l'enunciato

(5) Giovanni fuma

viene detto vero, per es., sono precisamente le circostanze sotto cui si direbbe che Giovanni fuma. La verità di (5) non è più misteriosa delle nozioni di Giovanni e di fumare. Applicata ad ogni enunciato S, la parola 'vero' non è più oscura della più oscura parola occorrente nell'enunciato stesso; infatti dire che S è vera è dire semplicemente S. Questo sembrerebbe condonare il ricorso che abbiamo fatto per motivi espositivi alla nozione generale di verità, comunque vengano trattati i sottili problemi che questa nozione coinvolge.

Per determinare la verità dell'enunciato (5), non è sufficiente esaminare l'enunciato, dobbiamo anche osservare Giovanni. Il caso è simile per molti altri enunciati. Così quando diciamo che è compito del geologo scoprire quali enunciati di geologia sono veri, noi non lo impegnamo in uno studio sedentario degli enunciati; gli richiediamo invece di trascorrere buona parte del suo tempo esaminando scogliere e crateri. Ma per la logica, ed in generale per la matematica, è altrimenti. La verità di (1) e (3) per esempio è riconoscibile dalla semplice indagine degli enunciati stessi. Messi di fronte ad ogni verità logica o ad ogni enunciato vero della matematica, non importa come complesso, riconosciamo che è vero, se lo è, esaminando l'enunciato e riflettendo o calcolando, l'osservare crateri, misurare tubi o il comportamento umano non è di alcuna utilità. Una volta accettato che la verità logica è discernibile, criteri per la verità logica possono essere formulati semplicemente in termini delle caratteristiche notazionali più o meno complesse degli enunciati; e corrispondentemente per la matematica, in generale. E così logici e matematici parlano intorno ad enunciati molto di più dei geologi, e la logica in un senso ampio è comunemente considerata includere il discorso intorno ad enunciati della logica nel suo senso più stretto, mentre nessuna siffatta biforcazione è richiesta per la geologia.

Se i criteri della verità matematica o logica devono essere formulati semplicemente in termini delle caratteristiche osservabili degli enunciati, un primo importante passo è l'esame e la schematizzazione del linguaggio in modo tale da porre le caratteristiche rilevanti degli enunciati nella forma più semplice possibile. Una revisione in questa direzione ha avuto luogo in matematica da gran tempo, forse la dipartita più fondamentale dal linguaggio ordinario è l'uso delle parentesi per indicare raggruppamenti e l'uso delle variabili per quegli scopi di riferimento incrociato per i quali il linguaggio ordinario usa i pronomi. Emulando la matematica, una revisione simile ha avuto luogo in logica a partire da Boole; questo è un punto di differenziazione così ovvio fra la vecchia logica e la nuova che l'ultima è spesso chiamata 'logica simbolica'. Ma revisioni linguistiche molto più radicali sono richieste se progetti come la formulazione di criteri di verità devono essere perseguiti fino in fondo. E' utile ridurre i concetti della logica e della matematica ad un minimo, definendone alcuni in termini di altri; infatti questo riduce la varietà degli enunciati che i criteri di verità devono coprire. Riduzioni di questo tipo, come poi risulta, possono essere eseguite in gran misura. Abbiamo già citato la magra lista degli strumenti sufficienti per la logica: gli analoghi di 'è', 'né ...né', 'ogni', ed i pronomi. Cos'è sorprendente, è che questi strumenti si dimostrano adeguati, non solo per la logica, ma anche la matematica pura in generale; la matematica si riduce alla logica.

Una volta dato al linguaggio della logica la forma più economica e schematica possibile, possiamo poi sperare di individuare dei tests che, applicati semplicemente alle forme notazionali degli enunciati, siano sempre in grado di distinguere fra quelli che sono logicamente veri e quelli che non lo sono. Ma è troppo sperare questo, particolarmente avendo in mente la riducibilità in generale della matematica alla logica. Ogni problema matematico diventerebbe risolubile con una procedura meccanica - anche il famoso problema di Fermat che ha resistito a soluzioni per tre secoli. Non sarebbe più necessario pubblicare dimostrazioni matematiche, i risultati verrebbero semplicemente formulati soggeti solo all' esame meccanico da parte del lettore.

Diffidenti rispetto a tale audace progetto, potremmo cercare di formulare qualche criterio notazionale meno potente per la verità logica e matematica: un criterio il cui soddisfacimento da parte di un dato enunciato sia individuabile solo per fortuna piuttosto che da un test rutinario infallibile. Tale invero è il carattere della dimostrazione matematica; una dimostrazione, una volta scoperta, può essere meccanicamente controllata ma la reale scoperta della dimostrazione è un fatto aleatorio. Dunque il nostro più modesto obiettivo può essere quello di una formulazione esplicita della nozione di dimostrazione, o di teorema, e tale da coinvolgere solo la struttura notazionale degli enunciati. Ma sviluppi recenti indicano, in realtà, che un criterio esaustivo per la verità logica o matematica anche secondo questi criteri più modesti è impossibile. Comunque si diano regole per la costruzione delle dimostrazioni che non portino a falsità, ci saranno sempre verità matematiche che non possono essere dimostrate con quelle regole. Ci saranno sempre delle verità matematiche che sono dimostrabilmente indimostrabili. Dobbiamo accontentarci di una nozione di 'teorema' che copre solo una o un'altra importante porzione delle verità della logica e della matematica.

Rimane il fatto che, ammesso che le verità logiche o matematiche possano essere individuate, i criteri possono essere formulati esplicitamente come criteri che si basano sulla struttura notazionale degli enunciati. Tali verità della logica o della matematica poiché sono riconosciute, se lo sono, attraverso dimostrazioni; e le considerazioni che intervengono per la costituzione di una dimostrazione ammettono una formulazione esplicita in termini delle caratteristiche notazionali degli enunciati. Tale formulazione non solo è possibile, ma altamente desiderabile per la più profonda comprensione che ci si aspetta da essa. La scoperta stessa che ci saranno sempre verità matematiche indimostrabili è una scoperta che non sarebbe stata possibile senza un'analisi delle nozioni di 'dimostrazione' e di 'teorema' esplicitamente in termini delle caratteristiche notazionali degli enunciati.

Gli sviluppi descritti non esauriscono in alcun modo l'intera motivazione dei moderni raffinamenti della logica. La riduzione delle nozioni della matematica e della logica ad un minimo, per esempio, è motivato da molto di più che non lo scopo particolare citato prima. E' infatti uno scopo in se stesso, perché ci fa conoscere quali siano le poche nozioni che sono alla fin fine presupposte dall'intera matematica. Attraverso questo processo di parafrasare alcuna nozione in termini di altre, ed alla fine di parafrasarle tutte in termini delle poche scelte, le varie nozioni logiche e matematiche subiscono una analisi illuminante.

La schematizzazione del linguaggio logico è importante anche in ambiti più pratici. L'utilità pratica della logica consiste nell'inferire conclusioni che non sono verità logiche da premesse che non sono verità logiche. La logica ammette tali inferenze quando l'enunciato condizionale 'se .... allora ...' che connette la premessa e la conclusione è esso stesso una verità logica (come (1) sopra); ed è proprio in questo modo che la verità logica si connette a problemi extra-logici. E una storia analoga vale per le applicazioni della matematica in generale; la straordinaria utilità delle tecniche matematiche nelle scienze naturali risiede semplicemente sull'importanza di discernere verità matematiche della forma 'Se ... allora ...' le cui parti componenti sono enunciati delle scienze naturali. Diversamente dai settori della matematica che si occupano di teoria dei numeri, la logica ha tradizionalmente fatto la sua comparsa nelle scienze naturali solo in modo tacito e ad un livello alquanto rudimentale di inferenza; ha giocato un ruolo completamente subordinato, quale l'aritmetica può averlo giocato nei giorni in cui si usava la numerazione Romana. Ma allorché schematizziamo la logica secondo le linee della matematica moderna (mantenendo utili abbreviazioni, naturalmente, oltre e sopra il vocabolario logico minimo) abbiamo uno strumento che è tanto efficace quanto l'aritmetica e settori ad essa connessi della matematica - e che di gran lunga supera questi ultimi in raggio di applicabilità.

Ove i numeri sono irrilevanti, tecniche matematiche consolidate sono state finora assai manchevoli. E' per questo che il progresso delle scienze naturali è dipeso così grandemente dal rilevamento di quantità misurabili di un tipo o di un altro. Misurare significa correlare i nostri oggetti di studio con la serie dei numeri reali e tali correlazioni sono desiderabili perché, una volta stabilite, tutta la teoria ben funzionante della matematica numerica è lì a portata di mano quale strumento per le nostre ulteriori indagini. Ma nessuna scienza si può basare esclusivamente sulla misurazione, e molte ricerche scientifiche sono assai lontane da quell'espediente. Allo scienziato che aspira a tecniche non-quantitative, allora la logica matematica dà qualche speranza. Offre tecniche esplicite per manipolare gli ingredienti fondamentali del discorso. Ci si può aspettare che il suo apporto positivo per la scienza consista anche in un contributo di rigore e chiarezza - un affinamento dei concetti della scienza. Tale affinamento dei concetti dovrebbe servire sia a dischiudere conseguenze finora nascoste di date ipotesi scientifiche che ad ovviare a sottili errori che possono frapporsi sulla strada del progresso scientifico.

La logica matematica ha già avuto applicazioni, ma le applicazioni più importanti devono ancora venire. L'utilità di una teoria non è da misurarsi soltanto in termini dell'applicazione di tecniche prefabbricate a problemi preformulati, dobbiamo lasciare che le necessità stesse dell'applicazione giochino la loro parte nel motivare elaborazioni successive della teoria. La storia della matematica è consistita in misura natevole di tale interscambio fra teoria ed applicazioni. Gran parte della promessa della logica matematica per la scienza risiede nelle sue potenzialità di essere punto di partenza per costruire tecniche supplementari di un tipo ancora non previsto in risposta a esigenze particolari.