TEOREMI DI COMPLETEZZA
PER ALCUNE ESTENSIONI DELLA LOGICA POSITIVA:

LOGICA MINIMALE, INTUIZIONISTA, DI JANKOV, DI DUMMETT E CLASSICA

§1. Modelli di Kripke. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio enunciativo contenente un insieme numerabile di variabili enunciative p, q, r, ... e i connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$. La nozione di *formula ben formata,fbf,* [1] (o *enunciato*) è definita nel modo usuale ed usiamo lettere maiuscole $A, B, C, \ldots$ come metavariabili per fbf di $\mathcal{L}$. Introduciamo i simboli $\top$ e $\bot$ così definiti: $\top =_{def} p \rightarrow p$, per qualche prefissata variabile enunciativa p, e $\bot =_{def} \neg\top$.

DEFINITION 1.1. *Una* struttura di Kripke, K-struttura, *è una coppia* $\mathcal{F} = \langle \mathbb{W}, \mathbb{R} \rangle$ *dove:*

- $\mathbb{W}$ *è un insieme non vuoto; (i suoi elementi sono detti* mondi*) e*
- $\mathbb{R}$ *è un ordine parziale su* $\mathbb{W}$ *(*$\mathbb{R}$ *è una relazione binaria riflessiva, transitiva e antisimmetrica)*[2]*.*

DEFINITION 1.2. *Un* modello di Kripke, K-modello, *è una tripla* $\mathcal{M} = \langle \mathbb{W}, \mathbb{R}, \mathbb{I} \rangle$ *dove* $\langle \mathbb{W}, \mathbb{R} \rangle$ *è una K-struttura e* $\mathbb{I}$ *è una interpretazione delle variabili enunciative tale che:*

- *1.* $\mathbb{I}(p) \subseteq \mathbb{W}$
- *2.* *se* $w\mathbb{R}v$ *e* $w \in \mathbb{I}(p)$ *allora* $v \in \mathbb{I}(p)$*.*

DEFINITION 1.3. *Definiamo quand' è che una fbf* G è vera in un mondo $w \in \mathbb{W}$ di un modello $\mathcal{M}$ *(in simboli* $\mathcal{M} \vDash_w G$*). La definizione è per induzione sulla costruzione delle fbf.*

$\mathcal{M} \vDash_w p$	*sse*	$w \in \mathbb{I}(p)$
$\mathcal{M} \vDash_w \neg A$	*sse*	*per ogni* $v \in \mathbb{W}$, *se* $w\mathbb{R}v$ *allora non*$\mathcal{M} \vDash_v A$ $(\mathcal{M} \nvDash_v A)$
$\mathcal{M} \vDash_w A \wedge B$	*sse*	$\mathcal{M} \vDash_w A$ *e* $\mathcal{M} \vDash_w B$
$\mathcal{M} \vDash_w A \vee B$	*sse*	$\mathcal{M} \vDash_w A$ *oppure* $\mathcal{M} \vDash_w B$
$\mathcal{M} \vDash_w A \rightarrow B$	*sse*	*per ogni* $v \in \mathbb{W}$ *tale che* $w\mathbb{R}v$, *se* $\mathcal{M} \vDash_v A$ *allora* $\mathcal{M} \vDash_v B$

DEFINITION 1.4. • *Una formula* A *è* vera in un K-modello $\mathcal{M} = \langle \mathbb{W}, \mathbb{R}, \mathbb{I} \rangle$ *(scriviamo* $\mathcal{M} \vDash A$*) sse per ogni* $w \in \mathbb{W}$, $\mathcal{M} \vDash_w A$*.*

---

[1] Ogni variabile enunciativa è una *fbf*; se A è una *fbf*, $\neg A$ è una *fbf*; se A e B sono *fbf*, allora $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ sono *fbf*.

[2] $\mathbb{R}$ è riflessiva sse per ogni x, $x\mathbb{R}x$; $\mathbb{R}$ è transitiva sse per ogni x, y, z, se $x\mathbb{R}y$ e $y\mathbb{R}z$ allora $x\mathbb{R}z$; $\mathbb{R}$ è antisimmetrica sse per ogni x, y, se $x\mathbb{R}y$ e $y\mathbb{R}x$ allora $x = y$.

- *Una formula A è* valida su una K-struttura $\mathcal{F} = \langle \mathbb{W}, \mathbb{R} \rangle$ *(scriviamo $\mathcal{F} \models A$), sse per ogni modello $\mathcal{M} = \langle \mathbb{W}, \mathbb{R}, \mathbb{I} \rangle$ basato su $\mathcal{F}$, $\mathcal{M} \models A$.*

- *Una formula A è* K-valida *(scriviamo $K \models A$, o semplicemente $\models A$, quando non dà luogo a confusione), sse per ogni K-struttura $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \models A$.*

NOTA Dalla definizione 1.3 segue che

$\mathcal{M} \not\models_w \neg A$	sse	non per ogni v, se $w\mathbb{R}v$ allora non $\mathcal{M} \models_v A$
	sse	esiste un v tale che non (se $w\mathbb{R}v$ allora non $\mathcal{M} \models_v A$)
	sse	esiste un v tale che $w\mathbb{R}v$ e $\mathcal{M} \models_v A$

$\mathcal{M} \models_w \neg\neg A$	sse	per ogni v, se $w\mathbb{R}v$ allora $\mathcal{M} \not\models_v \neg A$
	sse	per ogni v, se $w\mathbb{R}v$ allora esiste uno z tale che $v\mathbb{R}z$ e $\mathcal{M} \models_z A$.

$\mathcal{M} \not\models_w \neg\neg A$	sse	esiste un v tale che $w\mathbb{R}v$ e $\mathcal{M} \models_v \neg A$.
	sse	esiste un v tale che $w\mathbb{R}v$ e per ogni z, se $v\mathbb{R}z$ allora $\mathcal{M} \not\models_z A$.

$\mathcal{M} \not\models_w A \to B$	sse	non per ogni v, se $w\mathbb{R}v$ e $\mathcal{M} \models_v A$, allora $\mathcal{M} \models_v B$.
	sse	esiste un v tale che $w\mathbb{R}v$ e non ($\mathcal{M} \models_v A$ implica $\mathcal{M} \models_v B$)
	sse	esiste un v tale che $w\mathbb{R}v$ e $\mathcal{M} \models_v A$ e $\mathcal{M} \not\models_v B$.

LEMMA 1.5. (*Conservazione della verità) Per ogni K-modello $\mathcal{M} = \langle \mathbb{W}, \mathbb{R}, \mathbb{I} \rangle$, se $\mathcal{M} \models_w A$ allora per ogni v, $w\mathbb{R}v$ implica $\mathcal{M} \models_v A$.*

DIM. Per induzione sulla lunghezza della formula A. Assumiamo che $\mathcal{M} \models_w A$ e che $w\mathbb{R}v$:

- Sia $A = p$. Per ogni variabile enunciativa p, $\mathcal{M} \models_v p$ per la condizione (2) della definizione di $\mathbb{I}$.
- Sia $A = \neg B$. Supponiamo che esista uno z, tale che $w\mathbb{R}z$ e $\mathcal{M} \not\models_z \neg B$. Allora esiste un s, tale che $z\mathbb{R}s$ e $\mathcal{M} \models_s B$. Essendo $\mathbb{R}$ transitiva, $w\mathbb{R}s$ e dunque $\mathcal{M} \not\models_w \neg B$, contrariamente alll'assunzione fatta.
- Sia $A = (B \wedge C)$. Per ipotesi di induzione se $\mathcal{M} \models_w B$ (C), allora per ogni v, $w\mathbb{R}v$, $\mathcal{M} \models_v B$ (C). Supponiamo che esista uno z, tale che $w\mathbb{R}z$ e $\mathcal{M} \not\models_z B \wedge C$. Allora $\mathcal{M} \not\models_z B$ oppure $\mathcal{M} \not\models_z C$, quindi per ipotesi di induzione $\mathcal{M} \not\models_w B$ oppure $\mathcal{M} \not\models_w C$, da cui $\mathcal{M} \not\models_w (B \wedge C)$, contrariamente al fatto che $\mathcal{M} \models_w B \wedge C$.
- Sia $A = (B \vee C)$. Per ipotesi di induzione se $\mathcal{M} \models_w B$ (C), allora per ogni v, $w\mathbb{R}v$, $\mathcal{M} \models_v B$ (C). Supponiamo che esista un z, tale che $w\mathbb{R}z$ e $\mathcal{M} \not\models_z B \vee C$. Allora $\mathcal{M} \not\models_z B$ e $\mathcal{M} \not\models_z C$, quindi per

ipotesi di induzione $\mathcal{M} \not\models_w B$ e $\mathcal{M} \not\models_w C$, da cui $\mathcal{M} \not\models_w (B \vee C)$, contrariamente all'assunzione fatta.

- Sia $A = (B \to C)$. Supponiamo che esista uno z, tale che $w\mathbb{R}z$ e $\mathcal{M} \not\models_z B \to C$. Allora esiste un s tale che $\mathcal{M} \models_s B$ e $\mathcal{M} \not\models_s C$, essendo la relazione $\mathbb{R}$ transitiva, si ha che $w\mathbb{R}s$ e dunque $\mathcal{M} \not\models_w B \to C$, contrariamente all'assunzione fatta.

NOTA Dalla definizione 1.3 e dal lemma 1.5 segue che

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M} \not\models_w A_1 \to (A_2 \to B) & \text{sse} & \text{esiste un } v \text{ tale che } w\mathbb{R}v,\ \mathcal{M} \models_v A_1 \text{ e} \\
& & \mathcal{M} \not\models_v (A_2 \to B) \\
& \text{sse} & \text{esiste un } v \text{ tale che } w\mathbb{R}v \text{ e } \mathcal{M} \models_v A_1 \text{ e} \\
& & \text{esiste uno } z \text{ tale che } v\mathbb{R}z,\ \ \mathcal{M} \models_z A_2 \\
& & \text{e } \mathcal{M} \not\models_z B \\
& \text{sse} & \text{esiste uno } z \text{ tale che } w\mathbb{R}z,\ \ \mathcal{M} \models_z A_1 \\
& & \text{e } \mathcal{M} \models_z A_2 \text{ e } \mathcal{M} \not\models_z B
\end{array}$$

$\mathcal{M} \not\models_w A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to B)))$ sse esiste un v tale che $w\mathbb{R}v$, $\mathcal{M} \models_v A_1$, $\mathcal{M} \models_v A_2$, $\mathcal{M} \models_v A_3$ e $\mathcal{M} \not\models_v B$.

$\mathcal{M} \models_w A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to B)))$ sse per ogni v tale che $w\mathbb{R}v$, se $\mathcal{M} \models_v A_1$, $\mathcal{M} \models_v A_2$ e $\mathcal{M} \models_v A_3$ allora $\mathcal{M} \models_v B$.

CONTROMODELLI

Un K-modello $\mathcal{M}$ è detto un *contromodello* per una formula A sse esiste un w tale che $\mathcal{M} \not\models_w A$.

Considera il seguente K-modello $\mathcal{M}$ ove $\mathbb{W} = \{w, v\}$, $\mathbb{R} = \{\langle w, w\rangle, \langle w, v\rangle, \langle v, v\rangle\}$ e $\mathbb{I}(p) = \{v\}$. Allora

- $\mathcal{M} \not\models_w p \vee \neg p$. Infatti $\mathcal{M} \not\models_w p$ e $\mathcal{M} \not\models_w \neg p$ poichè $\mathcal{M} \not\models_v p$.

- $\mathcal{M} \not\models_w \neg\neg p \to p$. Infatti $\mathcal{M} \models_v p$, così $\mathcal{M} \not\models_v \neg p$, $\mathcal{M} \not\models_w \neg p$,quindi $\mathcal{M} \models_w \neg\neg p$. Poichè $\mathcal{M} \not\models_w p$, $\mathcal{M} \not\models_w \neg\neg p \to p$.

- $\mathcal{M} \not\models_w (\neg p \to p) \to p$. Infatti $\mathcal{M} \not\models_w p$, $\mathcal{M} \not\models_v \neg p$, quindi $\mathcal{M} \models_w \neg p \to p$, e $\mathcal{M} \not\models_w p$.

- Sia inoltre $\mathbb{I}(q) = \emptyset$. $\mathcal{M} \not\models_w (\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$. Infatti $\mathcal{M} \models_w \neg p \to q$, ma $\mathcal{M} \not\models_w \neg q \to p$.

Considera il seguente K-modello $\mathcal{M}$ ove $\mathbb{W} = \{w, v\}$, $\mathbb{R} = \{\langle w, w\rangle, \langle w, v\rangle, \langle v, v\rangle\}$ e $\mathbb{I}(p) = \{v\}$ e $\mathbb{I}(q) = \{v\}$. Allora

- $\mathcal{M} \not\models_w (p \to q) \to (\neg p \vee q)$. Infatti $\mathcal{M} \models_w p \to q$ e $\mathcal{M} \not\models_w \neg p$ e $\mathcal{M} \not\models_w q$.
- $\mathcal{M} \not\models_w \neg(\neg p \vee \neg q) \to p \wedge q$. Infatti $\mathcal{M} \models_w p \to q$ e $\mathcal{M} \not\models_w \neg p$ e $\mathcal{M} \not\models_w q$.
- $\mathcal{M} \not\models_w \neg(\neg p \wedge \neg q) \to p \vee q$.

Considera il seguente K-modello $\mathcal{M}$ ove $\mathbb{W} = \{w, v\}$, $\mathbb{R} = \{\langle w, w\rangle, \langle w, v\rangle, \langle v, v\rangle\}$ e $\mathbb{I}(p) = \{w, v\}$ e $\mathbb{I}(q) = \{v\}$. Allora

- $\mathcal{M} \not\models_w \neg(p \wedge \neg q) \to (p \to q)$. Infatti $\mathcal{M} \models_w \neg(p \wedge \neg q)$ e $\mathcal{M} \not\models_w p \to q$.
- $\mathcal{M} \not\models_w (\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$. Infatti $\mathcal{M} \models_w \neg q \to \neg p$, ma $\mathcal{M} \not\models_w p \to q$

Considera il seguente K-modello $\mathcal{M}$ ove $\mathbb{W} = \{w, v, z\}$, $\mathbb{R} = \{\langle w, w\rangle, \langle w, v\rangle, \langle w, z\rangle, \langle z, z\rangle\ \langle v, v\rangle\}$, $\mathbb{I}(p) = \{v\}$ e $\mathbb{I}(q) = \{z\}$.

- $\mathcal{M} \not\models_w \neg p \vee \neg\neg p$. Infatti $\mathcal{M} \not\models_w \neg p$ e $\mathcal{M} \not\models_w \neg\neg p$.
- $\mathcal{M} \not\models_w (p \to q) \vee (q \to p)$.

§2. Calcoli formali. LOGICA POSITIVA **P**
Schemi d'assiomi:

A1.1	$A \to (B \to A)$
A1.2	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
A2.1	$A \wedge B \to A$
A2.2	$A \wedge B \to B$
A2.3	$(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$
A3.1	$A \to A \vee B$
A3.2	$B \to A \vee B$
A3.3	$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

Regola di inferenza:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}\ (\textit{Modus ponens})$$

LOGICA MINIMALE **M**

$$\mathbf{P} + A5.1 \quad (A \to B) \to ((A \to \neg B)) \to \neg A)$$

LOGICA INTUIZIONISTA **I**

$$\mathbf{M} + A5.2 \quad A \to (\neg A \to B)$$

LOGICA DI JANKOV **J**

$$\mathbf{I} + \quad \neg A \vee \neg\neg A$$

LOGICA DI DUMMETT **B**

$$\mathbf{I} + \quad (A \to B) \vee (B \to A)$$

LOGICA CLASSICA **C**

$$\mathbf{I} + A5.3 \quad \neg\neg A \to A$$

THEOREM 2.1. (di deduzione) *Sia* $L \supseteq \mathbf{P}$.

$$A_1, \ldots, A_n, A \vdash_L B \quad sse \quad A_1, \ldots, A_n \vdash_L A \to B$$

DIM. Vedi gli appunti sulla logica classica.

Alcuni TEOREMI della logica MINIMALE

Le seguenti regole sono *direttamente ammissibili* in M:

M1 $\dfrac{A \to B \qquad A \to \neg B}{\neg A}$ (Regola associata all'assioma A5.1)

M2 $\dfrac{C \to (A \to B) \qquad D \to (A \to \neg B)}{C \wedge D \to \neg A}$

M3 $(A \to (B \wedge \neg B)) \to \neg A$

1	$A \to B \wedge \neg B$	$\vdash A \to B \wedge \neg B$	Ass.
2		$\vdash A \to B$	A2.1
3		$\vdash A \to \neg B$	A2.2
4		$\vdash \neg A$	M1:2,3
$1^\star$	$\emptyset$	$\vdash (A \to B \wedge \neg B) \to \neg A$	teor.deduz.

M4 $(A \to \neg A) \to \neg A$

1	$A \to \neg A$	$\vdash A \to \neg A$	Ass.
2		$\vdash A \to A$	identità
3		$\vdash \neg A$	M1:1,2
$1^\star$	$\emptyset$	$\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$	teor.deduz.

M5 $(\neg A \to A) \to \neg\neg A$

1	$\neg A \to A$	$\vdash \neg A \to A$	Ass.
2		$\vdash \neg A \to \neg A$	identità
3		$\vdash \neg\neg A$	M1:1,2
$1^\star$	$\emptyset$	$\vdash (\neg A \to A) \to \neg\neg A$	teor.deduz.

M6 $(A \to \neg\neg A)$

1		$\vdash A \to (\neg A \to A)$	A1.1
2		$\vdash (\neg A \to A) \to \neg\neg A$	M5
$1^\star$		$\vdash A \to \neg\neg A$	teor.deduz.

M7 $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

1	$A \to B,\quad \neg B$	$\vdash \neg B$	
2		$\vdash A \to \neg B$	
3		$\vdash A \to B$	
4		$\vdash \neg A$	M1:2,3
$1^\star$	$A \to B$	$\vdash \neg B \to \neg A$	teor.deduz.
$1^{\star^\star}$	$\emptyset$	$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	teor.deduz.

M8 $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

1	$A \to \neg B,\quad B$	$\vdash B$	Ass.
2		$\vdash A \to B$	A1.1:1
3		$\vdash A \to \neg B$	Ass.
4		$\vdash \neg A$	M1:2,3
$1^\star$	$A \to \neg B$	$\vdash B \to \neg A$	teor.deduz.
$1^{\star^\star}$	$\emptyset$	$\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$	teor.deduz.

M9 $A \to (\neg A \to \neg B)$

1		$\vdash A \to (B \to A)$	A1.1
2		$\vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$	M7
3		$\vdash A \to (\neg A \to \neg B)$	T:1,2

M10 $\neg(A \wedge \neg A)$

1		$\vdash A \wedge \neg A \to A$	A2.1
2		$\vdash A \wedge \neg A \to \neg A$	A2.2
3		$\vdash \neg(A \wedge \neg A)$	M1:1,2

M11 $\neg\neg(A \vee \neg A)$

1		$\vdash A \to A \vee \neg A$	A3.1
2		$\vdash \neg A \to A \vee \neg A$	A3.2
3		$\vdash \neg(A \vee \neg A) \to \neg A$	M7:1
4		$\vdash \neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A$	M7:2
5		$\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$	M1:3,4

M12 $A \wedge B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$

1		$\vdash A \wedge B \to A$	A2.1
2		$\vdash \neg A \to \neg(A \wedge B)$	M7:1
3		$\vdash A \wedge B \to B$	A2.2
4		$\vdash \neg B \to \neg(A \wedge B)$	M7:3
5		$\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$	A3.3:2,4
6		$\vdash A \wedge B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$	M8:5

M13 $A \vee B \to \neg(\neg A \wedge \neg B)$

1		$\vdash \neg A \wedge \neg B \to \neg A$	A2.1
2		$\vdash A \to \neg(\neg A \wedge \neg B)$	M8:1
3		$\vdash \neg A \wedge \neg B \to \neg B$	A2.2
4		$\vdash B \to \neg(\neg A \wedge \neg B)$	M8:3
5		$\vdash A \vee B \to \neg(\neg A \wedge \neg B)$	A3.3:2,4

M14 $(A \to B) \to \neg(A \wedge \neg B))$

1	$A \wedge \neg B$	$\vdash A \wedge \neg B$	Ass.
2		$\vdash A$	A2.1:1
3		$\vdash \neg B$	A2.2:2
4		$\vdash A \to ((A \to B) \to B)$	Modus Ponens
5		$\vdash (A \to B) \to B$	MP:2,4
6		$\vdash \neg B \to \neg(A \to B)$	M7:5
7		$\vdash \neg(A \to B)$	MP:3,6
$1^\star$	$\emptyset$	$\vdash A \wedge \neg B \to \neg(A \to B)$	teor.deduz.
$2^\star$		$\vdash (A \to B) \to \neg(A \wedge \neg B))$	M8:$1^\star$

M15 $\vdash_M A \wedge B \to \neg(A \to \neg B)$ Esercizio.

M16 $\vdash_M A \vee B \to (\neg A \to \neg\neg B)$ Esercizio.

M17 $\vdash_M (A \to B) \to \neg\neg(\neg A \vee B)$ Esercizio.

M18 $A \to \neg\neg A$

1	$\vdash (\neg A \to A) \to [(\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A]$	A5.1
2	$\vdash A \to (\neg A \to A)$	A1.1
3	$\vdash A \to [(\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A]$	T:1,2
4	$\vdash [A \to [(\neg A \to \neg A)] \to (A \to \neg\neg A)$	A1.2:3
5	$\vdash \neg A \to \neg A$	identità
6	$\vdash A \to (\neg A \to \neg A)$	A1.1:5
7	$\vdash A \to \neg\neg A$	MP:4,6

M19 $\neg\neg\neg A \to \neg A$

1	$\neg\neg\neg A$	$\vdash A \to \neg\neg A$	M18
2		$\vdash \neg\neg\neg A$	Ass.
3		$\vdash A \to \neg\neg\neg A$	A1.1:2
4		$\vdash \neg A$	M1:1,3
$1^\star$	$\emptyset$	$\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$	teor.deduz.

M20 $\neg\neg(A \to B) \wedge \neg\neg A \to \neg\neg B$

1		$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	M7
2		$\vdash \neg B \to [(A \to B) \to \neg A]$	SP:1
3		$\vdash \neg\neg A \to ((A \to B) \to \neg\neg A)$	A1.1
4		$\vdash \neg\neg A \wedge \neg B \to \neg(A \to B)$	M2:2,3
5		$\vdash \neg\neg A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$	EXP:4
6		$\vdash \neg\neg(A \to B) \to (\neg B \to \neg\neg(A \to B))$	A1.1
7		$\vdash \neg\neg A \wedge \neg\neg(A \to B) \to \neg\neg B$	M2:5,6

M21 $(\neg A \to A) \to \neg\neg A$

1	$\neg A \to A$	$\vdash \neg A \to \neg A$	identità
2		$\vdash \neg A \to A$	Ass.
3		$\vdash \neg\neg A$	M1:1,2
$1^\star$	$\emptyset$	$\vdash (\neg A \to A) \to \neg\neg A$	teor.deduz.

M22 $(\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A$

1		$\vdash (\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg\neg\neg A$	M21
2		$\vdash \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	M19
3		$\vdash (\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A$	T:1,2

M23 $(\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A$

1		$\vdash (\neg\neg A \to \neg A) \to \neg\neg\neg A$	M21
2		$\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$	M19
3		$\vdash (\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A$	T:1,2

Alcuni TEOREMI della logica INTUIZIONISTA

I1 $\neg A \to (A \to B)$ Esercizio.

I2 $(A \wedge \neg A) \to B$ Esercizio.

I3 $(A \vee B) \to (\neg A \to B)$

1		$\vdash A \to (\neg A \to B)$	A5.2
2		$\vdash B \to (\neg A \to B)$	A1.1
3		$\vdash (A \vee B) \to (\neg A \to B)$	A3.3

I4 $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$

1		$\vdash \neg A \to (A \to B)$	Esercizio
2		$\vdash B \to (A \to B)$	A1.1
3		$\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)$	A3.3

I5 $A \vee (B \wedge \neg B) \to A$

1		$\vdash A \to A$	identità
2		$\vdash (B \wedge \neg B) \to A$	Esercizio
3		$\vdash A \vee (B \wedge \neg B) \to A$	A3.3:1,2

I8 $\neg\neg(\neg\neg A \to A)$

1	$\neg(\neg\neg A \to A)$	$\vdash \neg(\neg\neg A \to A)$	Ass.
2		$\vdash A \to \neg(\neg\neg A \to A)$	A1.1:1
3		$\vdash A \to (\neg\neg A \to A)$	A1.1
4		$\vdash \neg A$	M1:2,3
5		$\vdash \neg A \to (\neg\neg A \to A)$	A5.2
6		$\vdash \neg\neg A \to A$	MP:4,5
$1^\star$	$\emptyset$	$\vdash \neg(\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg A \to A)$	teor.deduz.
$2^\star$		$\vdash \neg\neg(\neg\neg A \to A)$	

Alcuni TEOREMI della logica di JANKOV (detta anche *logica del terzo escluso debole*)

J1 $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ Esercizio.

J2 $(A \to \neg B) \vee (\neg B \to A)$ Esercizio.

J3 $(A \to C \vee \neg D) \to [(A \to C) \vee \neg D]$ Esercizio.

Alcuni TEOREMI della logica di DUMMETT (detta anche LC)

B1 $\neg A \vee \neg\neg A$

È teorema di B : $(\neg A \to \neg\neg A) \vee (\neg\neg A \to \neg A)$ e dai lemmi M21 e M22 si ottiene che è teorema $\neg A \vee \neg\neg A$.

LEMMA 2.2. (di Kolmogorof) $\mathbf{C} \vdash A$ *implica* $\mathbf{I} \vdash \neg\neg A$

Dim. Sia $G_1, \dots, G_n$, (ove $G_n = A$), una dimostrazione di A in C. Facciamo vedere che per ogni k, $1 \leq k \leq n$, $\neg\neg G_k$ è teorema di I, in particolare $\neg\neg G_n$ è teorema di I, ovvero $\vdash_I \neg\neg A$. Per induzione su k.

$k = 1$. G_1 non può essere che un assioma di C. Se G_1 è Ax 1.1 - Ax 5.2, allora $\vdash_I \neg\neg G_1$ poichè $\vdash_I G_1 \rightarrow \neg\neg G_1$. Se G_1 è Ax 5.3, allora come abbiamo già dimostrato $\vdash_I \neg\neg(\neg\neg G_1 \rightarrow G_1)$ (vedi $I.8$).

$1 < k \leq n$. G_k è un assioma di C ed in questo caso si ripetono i ragionamenti fatti per G_1 oppure è ottenuto per *modus ponens* da G_j e G_i, ove $j, i < k$ e G_i è della forma $(G_j \rightarrow G_k)$. Per ipotesi di induzione, $\vdash_I \neg\neg G_j$ e $\vdash_I \neg\neg(G_j \rightarrow G_k)$, quindi per **M**.20, $\vdash_I \neg\neg G_k$.

Lemma 2.3. $\mathbf{C} \vdash \neg A$ *sse* $\mathbf{I} \vdash \neg A$

Dim. Dal lemma di Kolmogorof e dal fatto che $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ è teorema intuizionista, cfr M19.

§3. Validità e Completezza per $\mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{C}$.

Lemma 3.1. (Validità)
(a) $\mathbf{P} \vdash A \Rightarrow A$ *è valida su tutte le K-strutture (in A non occorrono negazioni)*
(b) $\mathbf{I} \vdash A \Rightarrow A$ *è valida su tutte le K-strutture*
(c) $\mathbf{C} \vdash A \Rightarrow A$ *è valida su tutte le K-strutture dove* $\mathbb{R}$ *soddisfa la condizione:* $x\mathbb{R}y$ *sse* $x = y$.

Dim. Dobbiamo dimostrare che tutti i teoremi di $\mathbf{P}(\mathbf{I}, \mathbf{C})$ sono veri in ogni mondo di ogni modello basato su una qualsiasi K-struttura. Sia G un qualsiasi teorema di $\mathbf{P}(\mathbf{I}, \mathbf{C})$. La dimostrazione procede per induzione sulla lunghezza della dimostrazione $\mathbb{D}$ di G in $\mathbf{P}(\mathbf{I}, \mathbf{C})$.

(a) Sia $\lg(\mathbb{D}) = 1$. Dunque G è un assioma di $\mathbf{P}$. Procediamo per assurdo e supponiamo che esista una struttura ed un K-modello $\mathcal{M} = \langle \mathbb{W}, \mathbb{R}, \mathbb{I} \rangle$ ed un mondo w, tale che $\mathcal{M} \nvDash_w G$. Consideriamo i vari casi.

G sia Ax. 1.1: $\mathcal{M} \nvDash_w A \rightarrow (B \rightarrow A)$. Dunque esiste un v, wRv, tale che $\mathcal{M} \vDash_v A$ e $\mathcal{M} \vDash_v B$ e $\mathcal{M} \nvDash_v A$, ma questo è impossibile.

G sia Ax. 1.2: $\mathcal{M} \nvDash_w (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$. Allora esiste un v, wRv, tale che $\mathcal{M} \vDash_v A \rightarrow (B \rightarrow C)$ e $\mathcal{M} \vDash_v A \rightarrow B$ e $\mathcal{M} \vDash_v A$ e $\mathcal{M} \nvDash_v C$. Essendo $\mathbb{R}$ riflessiva, $\mathcal{M} \vDash_v B \rightarrow C$ e $\mathcal{M} \vDash_v C$, ottenendo così una contraddizione.
G sia Ax. 2.1:
G sia Ax. 2.2:
G sia Ax. 2.3:
G sia Ax. 3.1:
G sia Ax. 3.2:
G sia Ax. 3.3:

Sia $\lg(\mathbb{D}) = k+1$. Per ipotesi di induzione tutte le formule che occorrono ad una riga con indice $\leq k$ sono valide. La formula G che occorre alla riga $k+1$ può essere un assioma ed in questo caso si ripetono i ragionamenti visti sopra oppure può essere stata ottenuta via regola del *modus ponens*. Quindi dovranno occorrere in righe $\leq k$ due formule B e $(B \to G)$. Per ipotesi di induzione, B è K-valida e $(B \to G)$ è K-valida. Se esistesse una K-struttura F ed un modello $\mathcal{M}$ basato su F ed un mondo w, tale che $\mathcal{M} \not\models_w G$, si otterrebbe una contraddizione col fatto che $\mathcal{M} \models_w B$, e $\mathcal{M} \models_w (B \to G)$.

(b) E' da considerare l'assioma A5.1.
Supponiamo per assurdo che $\mathcal{M} \not\models_w (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$. Allora esiste un v, $w\mathbb{R}v$, tale che $\mathcal{M} \models_v A \to B$, $\mathcal{M} \models_v A \to \neg B$ e $\mathcal{M} \not\models_v \neg A$. Dunque esiste un s, $v\mathbb{R}s$, $\mathcal{M} \models_s A$. Poichè $\mathbb{R}$ è transitiva e per il lemma di conservazione della verità, $\mathcal{M} \models_s B$ e $\mathcal{M} \models_s \neg B$. Essendo $\mathbb{R}$ riflessiva, $\mathcal{M} \not\models_s B$, ottenendo una contraddizione.
Consideriamo l'assioma A5.2.
Supponiamo per assurdo che $\mathcal{M} \not\models_w A \to (\neg A \to B)$. Allora esiste un v, $w\mathbb{R}v$, tale che $\mathcal{M} \models_v A$ e $\mathcal{M} \models_v \neg A$ e $\mathcal{M} \not\models_v B$. Essendo $\mathbb{R}$ riflessiva, $\mathcal{M} \not\models_v A$, ottenendo una contraddizione.

(c) Rimane da verificare la validità dell'assioma A5.3.
Supponiamo per assurdo che $\mathcal{M} \not\models_w \neg\neg A \to A$. Allora esiste un v, $w\mathbb{R}v$, tale che $\mathcal{M} \models_v \neg\neg A$ e $\mathcal{M} \not\models_v A$. Poichè l'unico v relato a w è w stesso, $\mathcal{M} \models_w \neg\neg A$ e dunque per ogni v, se $w\mathbb{R}v$ allora esiste uno z tale che $v\mathbb{R}z$ e $\mathcal{M} \models_z A$, ancora poichè l'unico z relato a w è w stesso, $\mathcal{M} \models_w A$, ottenendo così una contraddizione.

DEFINITION 3.2. *Sia data una logica enunciativa $L \supseteq \mathbf{P}$ e sia Δ un insieme di formule. Allora*

Δ *è* L-consistente	*sse*	$\Delta \nvdash_L A$*, per qualche formula* A
Δ *è* L-B-consistente	*sse*	$\Delta \nvdash_L B$
Δ *è* L-inconsistente	*sse*	$\Delta \vdash_L A$ *per ogni formula* A
Δ *è* L-contraddittorio	*sse*	$\Delta \vdash_L \bot$
Δ *è* L-deduttivamente chiuso	*sse*	$\Delta \vdash_L A$ *implica* $A \in \Delta$
Δ *è* primo	*sse*	$(A \vee B) \in \Delta$ *implica* $A \in \Delta$ *oppure* $B \in \Delta$
Δ *è* B-massimale	*sse*	*per ogni formula* A*,* $A \in \Delta$ *oppure* $(A \to B) \in \Delta$

LEMMA 3.3. *(a) Se Δ è $\mathbf{M}$-inconsistente allora è $\mathbf{M}$-contraddittorio.*
(b) Δ è $\mathbf{I}$-inconsistente sse Δ è $\mathbf{I}$-contraddittorio.

DIM. (b) Via A5.2.

LEMMA 3.4. *(a) Se Δ è L-B-consistente e $\Delta \vdash_L A$, allora $\Delta \cup \{A\}$ è L-B-consistente.*

(b) Se Δ è L-deduttivamente chiuso, $A \in \Delta$ e $(A \to B) \in \Delta$ allora $B \in \Delta$.

(c) Se Δ è L-B-consistente e B-massimale allora è L-deduttivamente chiuso.

PROOF: (c) Sia $\Delta \vdash_L A$ e $A \notin \Delta$. Allora $(A \to B) \in \Delta$ e così $\Delta \vdash_L (A \to B)$, $\Delta \vdash B$, contrariamente al fatto che Δ è L-B-consistente. Via modus ponens $\Delta \vdash_L B$.

LEMMA 3.5. (Lemma di Lindenbaum) *Per ogni insieme Δ di formule L-B-consistente esiste un insieme $\Gamma \supseteq \Delta$ che è L-B-consistente e B-massimale.*

DIM.: Sia $\{C_0, C_1, \ldots \ldots C_n, \ldots\}$ una enumerazione di tutte le formule di $\mathcal{L}$. Definiamo la seguente catena di insiemi di formule:

- $\Gamma_0 = \Delta$
- $$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{C_n\} & \text{è } \Gamma_n \cup \{C_n\} \text{ è } L\text{-}B\text{-consistente} \\ \Gamma_n \cup \{C_n \to B\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{C_n\} \text{ non è } L\text{-}B\text{-consistente} \end{cases}$$
- $\Gamma = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$

Γ è B-massimale. Si consideri una qualsiasi formula A. $A = C_k$ per qualche k e per costruzione $C_k \in \Gamma_{k+1}$ oppure $(C_k \to B) \in \Gamma_{k+1}$, dunque $A \in \Gamma$ oppure $(A \to B) \in \Gamma$.
Per induzione su n, mostriamo che per ogni n, Γ_n is L-B-consistente.
$\Gamma_0 = \Delta$ è L-B-consistente per ipotesi. Considera Γ_{n+1}.
Se $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{C_n\}$ allora è L-B-consistente per costruzione.
Se $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{C_n \to B\}$ allora (sempre per costruzione) $\Gamma_n \cup \{C_n\} \vdash_L B$. Per il teorema di deduzione, $\Gamma_n \vdash_L C_n \to B$. Ma Γ_n è L-consistente per ipotesi di induzione e quindi $\Gamma_n \cup \{C_n \to B\}$ è L-B-consistente per il lemma 3(a). Dunque Γ_n è L-B-consistente per ogni n. Il fatto che $\Gamma = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$ sia L-B-consistente segue da:

LEMMA 3.6. (Lemma delle catene)
Data una catena di insiemi $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$ subseteq $\ldots \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots$, se $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \vdash_L B$ allora $\Gamma_n \vdash_L B$, per qualche n.

DIMA. Poniamo che $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n = \Gamma$ e $\Gamma \vdash_L B$. Siano $G_1, G_2, \ldots G_k$ le formule di Γ che occorrono nella dimostrazione di B da Γ. Siano $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \ldots \Gamma_{j_k}$ gli insiemi della catena tali che $G_i \in \Gamma_{j_i}$ per $i = 1, \ldots, n$. Sia $j_r = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$. Poichè ogni $G_i \in \Gamma_{j_r}$, $1 \leq i \leq n$, $\Gamma_{j_r} \vdash_L B$, dunque $\Gamma \vdash_L B$.

Lemma 3.7. *Sia* Δ *un insieme* L-B*-consistente e* B*-massimale per qualche formula* B*. Allora* Δ *è primo.*

Dim.: Supponiamo che $(C \vee D) \in \Delta$ e che $C \notin \Delta$ e $D \notin \Delta$. Allora essendo Δ L-B-massimale, $(C \to B) \in \Delta$ e $(D \to B) \in \Delta$. Allora per l'assioma A3.3 ed il fatto che Δ è deduttivamente chiuso, $(C \vee D \to B) \in \Delta$, $B \in \Delta$, $\Delta \vdash_L B$, contrariamente all'ipotesi che Δ sia L-B-consistente.

Definition 3.8. $\mathcal{M}^{\mathcal{L}} = \langle \mathbb{W}^L, \mathbb{R}, \mathbb{I} \rangle$ *è detto un* modello canonico *per* L *sse*

- $\mathbb{W}^L$ *è la famiglia di tutti gli insiemi di formule* L*-consistenti* L*-deduttivamente chiusi e primi*
- $\mathbb{R} = \subseteq$
- $\mathbb{I}(p) = \{z \in \mathbb{W}^L : p \in z\}$

Lemma 3.9. $\mathcal{M}^L = \langle \mathbb{W}^L, \mathbb{R}, \mathbb{I} \rangle$ *è un* K*-modello.*

Dim.:

- $\mathcal{W}^L$ è non vuoto (vedi i lemmi 3.2, 3.5, 3.7)
- $\subseteq$ è riflessiva, transitiva e antisimmetrica
- Banalmente $\mathbb{I}(p) \subseteq \mathcal{W}^L$. Inoltre se $w \in \mathbb{I}(p)$ e $w \subseteq v$, allora $p \in v$, così $v \in \mathbb{I}(p)$.

Lemma 3.10. *Sia* $\mathcal{M}^L$ *un modello canonico. Se* $w \in \mathbb{W}^L$ *e* $(A \to B) \notin w$*, allora* $w \cup \{A\}$ *è* L-B*-consistente.*

Dim. Supponiamo che $w \cup \{A\}$ non sia B-consistente. Allora $w \cup \{A\} \vdash_L B$ e così per il teorema di deduzione $w \vdash_L A \to B$. Ma w è L-deduttivamente chiuso, quindi $(A \to B) \in w$, contrariamente all'ipotesi.

Lemma 3.11. (del modello canonico)
Sia $\mathcal{M}^L$ *il modello canonico per* L*. Per ogni* $w \in \mathbb{W}$*,*

$$\mathcal{M}^L \vDash_w G \quad sse \quad G \in w$$

Dim.: per induzione sulla lunghezza di A.

- $G = p$. $\mathcal{M}^L \vDash_w p$ sse $w \in \mathbb{I}(p)$ sse (per definizione di modello canonico) $w \in \{z \in \mathbb{W}^L : p \in z\}$ sse $p \in w$.

- $G = A \wedge B$. $\mathcal{M}^L \vDash_w A \wedge B$ sse $\mathcal{M}^L \vDash_w A$ e $\mathcal{M}^L \vDash_w B$ sse $A \in w$ e $B \in w$ (per ip. ind.) sse $A \wedge B \in w$.

- $G = A \vee B$. Se $\mathcal{M}^L \vDash_w A \vee B$, allora $\mathcal{M}^L \vDash_w A$ oppure $\mathcal{M}^L \vDash_w B$, per ip. ind. $A \in w$ oppure $B \in w$, da cui $A \vee B \in w$.
  Sia $(A \vee B) \in w$, allora, essendo w primo, $A \in w$ oppure $B \in w$, quindi per ip. ind. $\mathcal{M}^L \vDash_w A$ oppure $\mathcal{M}^L \vDash_w B$, da cui $\mathcal{M}^L \vDash_w$

$(A \vee B)$.

- $G = A \to B$. Supponi che $(A \to B) \notin w$. Allora $w \cup \{A\}$ è B-consistente per il lemma 3.10. Per il lemma di Lindenbaum esiste un v tale che $w \cup \{A\} \subseteq v$, e v è L-B-consistente e B-massimale. Per i lemmi e 3.7
  v è primo e L-deduttivamente chiuso, quindi $v \in \mathbb{W}^L$. Banalmente $A \in v$ e $B \notin v$. Per ipotesi di induzione $\mathcal{M}^L \models_v A$ e $\mathcal{M}^L \not\models_v B$, da cui $\mathcal{M}^L \not\models_w (A \to B)$.
  Sia $\mathcal{M}^L \not\models_w A \to B$. Allora $\mathcal{M}^L \models_v A$ e $\mathcal{M}^L \not\models_v B$ per qualche $v \supseteq w$. Per ipotesi di induzione $A \in v$ e $B \notin v$. Quindi $(A \to B) \notin v$, ne segue che $(A \to B) \in w$.

- $G = \neg A$. Supponi che $\neg A \notin w$. Allora $(A \to \bot) \notin w$, quindi esiste una estensione v di w che è L-$\bot$-consistente, $\bot$-massimale ed inoltre $A \in v$. Per i lemmi i lemmi e 3.7, v appartiene a $\mathbb{W}^L$. Poichè $A \in v$, per ipotesi di induzione $\mathcal{M}^L \models_v A$. Quindi $\mathcal{M}^L \not\models_w \neg A$.
  Supponi che $\mathcal{M}^L \not\models_w \neg A$. Allora esiste un $v \supseteq w$, tale che $\mathcal{M}^L \models_v A$. Per ipotesi di induzione $A \in v$ ed essendo v L-consistente $\neg A \notin v$, quindi $\neg A \notin w$.

LEMMA 3.12. *Sia $L \supseteq \mathbf{P}$ e $\mathcal{M}^L$ il modello canonico per L.*
(i) Se $\nvdash_L A$, allora $\mathcal{M}^L \not\models_w A$ per qualche w.
(ii) Se $\vdash_L A$, allora $\mathcal{M}^L \models_w A$ per ogni w.

DIM. (i) Sia $\nvdash_L A$. Allora $\emptyset$ è L-A-consistente e dunque esiste un insieme v che è L-A-consistente e A-massimale. $v \in W^L$ e $A \notin v$, quindi per il lemma 3.11, $\mathcal{M}^L \not\models A$. (ii) Ogni mondo v del modello canonico è deduttivamente chiuso, quindi contiene tutti i teoremi della logica L, da cui per il lemma 3.11, $\mathcal{M}^L \models A$, per ogni teorema di A di L.

LEMMA 3.13. (Completezza) *Sia $L \supseteq \mathbf{P}$.*
(i) Se $\nvdash_{\mathbf{P}} A$, allora esiste una K-struttura F tale che $F \not\models_w A$.
(ii) Se $\nvdash_{\mathbf{I}} A$, allora esiste una K-struttura F tale che $F \not\models_w A$.
(iii) Se $\nvdash_{\mathbf{C}} A$, allora esiste una K-struttura F in cui $w\mathbb{R}v$ sse $w = v$ tale che $F \not\models_w A$.

DIM. (i) e (ii) Il modello canonico per $\mathbf{P}$ e $\mathbf{I}$ è basato su un ordine parziale, quindi su una K-struttura. (iii) Dobbiamo far vedere che il modello canonico per $\mathbf{C}$ è basato su un ordine parziale in cui $w\mathbb{R}v$ sse $w = v$. Banalmente se $w = v$ allora $w \subseteq v$. Assumiamo ora che $w \subseteq v$ e che $w \neq v$. Allora per qualche formula A, si ha che $A \notin w$ e $A \in v$. Ma w è primo e quindi, essendo $C \vdash A \vee \neg A$, $\neg A \in w$ da cui $\neg A \in v$. Ne segue che v è inconsistente contrariamente al fatto che è un elemento del modello canonico.

AGGIUNTA per la logica MINIMALE

DEFINITION 3.14. *Una* K^M-struttura *è una tripla* $F = \langle \mathbb{W}, \mathbb{C}, \mathbb{R} \rangle$ *dove:*
- $\mathbb{W}$ *è un insieme non vuoto, i cui elementi sono detti* mondi*,*
- $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{W}$ *che soddisfa la seguente proprietà: se* $w \in \mathbb{C}$ *e* $w\mathbb{R}v$ *allora* $v \in \mathbb{C}$*. Gli elementi di* $\mathbb{C}$ *sono detti* mondi contraddittori*.*
- $\mathbb{R}$ *è un ordine parziale su* $\mathbb{W}$*.*

DEFINITION 3.15. *Un* K^M-modello*, è una quadrupla* $\mathcal{M}\langle \mathbb{W}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{I} \rangle$ *dove* $\langle \mathbb{W}, \mathbb{C}, \mathbb{R} \rangle$ *è una* K^M*-struttura e* $\mathbb{I}$ *è una interpretazione (valutazione) delle variabili proposizionali tale che:*
- $\mathbb{I}(p) \subseteq \mathbb{W}$
- *se* $w\mathbb{R}v$ *e* $w \in \mathbb{I}(p)$ *allora* $v \in \mathbb{I}(p)$*.*

DEFINITION 3.16. *Data una formula* G *di* $\mathcal{L}$*, definiamo per induzione quand' è che* G è vera *in* $\mathcal{M}$ in un mondo $w \in \mathbb{W}$
(in simboli $\mathcal{M} \vDash_w G$*):*

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M} \vDash_w p & sse & w \in \mathbb{I}(p) \\
\mathcal{M} \vDash_w \neg A & sse & per\ ogni\, v \in \mathbb{W},\ se\, w\mathbb{R}ve\mathcal{M} \vDash_w A\ allora\, v \in \mathbb{C} \\
\mathcal{M} \vDash_w A \wedge B & sse & \mathcal{M} \vDash_w A\ e\, \mathcal{M} \vDash_w B \\
\mathcal{M} \vDash_w A \vee B & sse & \mathcal{M} \vDash_w A\ oppure\, \mathcal{M} \vDash_w B \\
\mathcal{M} \vDash_w A \to B & sse & per\ ogni\, v \in \mathbb{W}tale\ che\, w\mathbb{R}v\ se\, \mathcal{M} \vDash_v A\ allora\, \mathcal{M} \vDash_v B
\end{array}
$$

DEFINITION 3.17.
- *Una formula* A *è* valida in un K^M-modello $\mathcal{M} = \langle \mathbb{W}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{I} \rangle$ *sse per ogni* $w \in \mathbb{W}$*,* $\mathcal{M} \vdash_w A$ *(scriviamo* $\mathcal{M} \vDash A$*).*
- *Una formula* A *è* valida su una K^M-struttura $F = \langle \mathbb{W}, \mathbb{C}, \mathbb{R} \rangle$ *(scriviamo* $F \vDash A$*), sse per ogni modello* $\mathcal{M} = \langle \mathbb{W}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{I} \rangle$ *basato su* F*,* $\mathcal{M} \vDash A$*.*
- *Una formula* A *è* K^M-valida *(scriviamo* $K^M \vDash A$*), sse per ogni* K^M*-struttura* F*,* $F \vDash A$*.*

NOTA. Dalla definizione 3.16, segue che:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M} \nvDash_w \neg A & \text{sse} & \text{non per ogni } v, \text{ se } w\mathbb{R}v \text{ e } \mathcal{M} \vDash_v A \text{ allora } v \in \mathbb{C} \\
 & \text{sse} & \text{esiste un } v \text{ tale che } w\mathbb{R}v,\ v \notin \mathbb{C} \text{ e } \mathcal{M} \vDash_v A. \\
 & & \\
\mathcal{M} \vDash_w \neg\neg A & \text{sse} & \text{per ogni } v, \text{ se } w\mathbb{R}v \text{ e } \mathcal{M} \vDash_v \neg A \text{ allora } v \in \mathbb{C} \\
 & \text{sse} & \text{per ogni } v, \text{ se } w\mathbb{R}v \text{ e } v \notin \mathbb{C} \text{ allora } \mathcal{M} \nvDash_v \neg A \\
 & \text{sse} & \text{per ogni } v, \text{ se } w\mathbb{R}v \text{ e } v \notin \mathbb{C} \text{ allora } \exists z(v\mathbb{R}z \text{ e } \mathcal{M} \vDash_z A \text{ e } z \notin \mathbb{C}).
\end{array}
$$

$\mathcal{M} \nvDash_w \neg\neg A$	sse	esiste un v, $w\mathbb{R}v$ e $v \notin \mathbb{C}$ e $\mathcal{M} \vDash_v \neg A$
	sse	esiste un v ($w\mathbb{R}v$ e $v \notin \mathbb{C}$ e per ogni z($v\mathbb{R}z$ e $\mathcal{M} \vDash_z A$ allora $z \in \mathbb{C}$)).

Alcuni FATTI su $\mathbb{C}$:

Lemma 3.18. *Se $w \in \mathbb{C}$ allora per ogni formula A: $\mathcal{M} \vDash_w \neg A$.*

Dim. Se $\mathcal{M} \nvDash_w \neg A$ allora esiste un $v.wRv.v \notin \mathbb{C}$, il che e' impossibile.

Lemma 3.19. *Se $w \in \mathbb{C}$ allora $\mathcal{M} \vDash_w \bot$.*

Dim. Se $w \in \mathbb{C}$, per il lemma 3.18, $\mathcal{M} \vDash_w \neg\top$, quindi $\mathcal{M} \vDash_w \bot$.

Lemma 3.20. *Se $\mathcal{M} \vDash_w A \wedge \neg A$ per qualche formula A, allora $w \in \mathbb{C}$.*

Dim. Supponiamo che $\mathcal{M} \vDash_w A \wedge \neg A$ per qualche formula A. Allora (i) $\mathcal{M} \vDash_w A$ e (ii) $\mathcal{M} \vDash_w \neg A$. Da (ii), se $w\mathbb{R}v$ e $\mathcal{M} \vDash_v A$ allora $v \in \mathbb{C}$. Poichè $\mathbb{R}$ è riflessiva, se $\mathcal{M} \vDash_w A$ allora $w \in \mathbb{C}$. Ma per (i) $\mathcal{M} \vDash_w A$, dunque $w \in \mathbb{C}$.

Lemma 3.21. *$w \in \mathbb{C}$ sse $\mathcal{M} \vDash_w \bot$.*

Dim.: $\Rightarrow$ dal lemma 3.19.
$\Leftarrow$ se $\mathcal{M} \vDash_w \bot$, allora $\mathcal{M} \vDash_w \top \wedge \neg\top$, così $w \in \mathbb{C}$ per il lemma 3.20.

Lemma 3.22. *Per ogni $w \in \mathbb{W}$ e ogni formula A, $\mathcal{M} \vDash_w A \to \bot$ sse $\mathcal{M} \vDash_w \neg A$.*

Dim. Se $\mathcal{M} \vDash_w A \to \bot$, allora per ogni v tale che $w\mathbb{R}v$ e $\mathcal{M} \vDash_v A$ si ha che $\mathcal{M} \vDash_v \bot$. Questo significa che $v \in \mathbb{C}$ per il lemma 3.21 e quindi $\mathcal{M} \vDash_w \neg A$. Viceversa, se $\mathcal{M} \vDash_w \neg A$, allora per ogni v, $w\mathbb{R}v$, se $\mathcal{M} \vDash_v A$ segue che $v \in \mathbb{C}$, ovvero, per il lemma 3.21 per ogni v, $w\mathbb{R}v$, se $\mathcal{M} \vDash_v A$ segue che $\mathcal{M} \vDash_w \bot$, quindi $\mathcal{M} \vDash_w (A \to \bot)$.

Ecco alcuni CONTROMODELLI a formule valide intuizionisticamente.
Sia $\mathbb{C} \neq \emptyset$. Considera un K-modello ove $\mathbb{W} = \{w\} = \mathbb{C}$, $\mathbb{I}(p) = \{w\}$ e $\mathbb{I}(q) = \emptyset$. Allora:

- $\mathcal{M} \nvDash_w p \wedge \neg p \to q$. Infatti $\mathcal{M} \vDash_w p$, $\mathcal{M} \vDash_w \neg p$, ma $\mathcal{M} \nvDash_w q$.
- $\mathcal{M} \nvDash_w \bot \to (q \wedge \neg q)$. Infatti $\mathcal{M} \vDash_w \bot$, ma $\mathcal{M} \nvDash_w q$, così$\mathcal{M} \nvDash_w q \wedge \neg q$.
- $\mathcal{M} \nvDash_w \bot \to q$. Infatti $\mathcal{M} \vDash_w \bot$, ma $\mathcal{M} \nvDash_w q$.

Considera un K^M-modello ove $\mathbb{W} = \{w, v\}$, $\mathbb{C} = \{v\}$, $\mathbb{I}(p) = \{v\}$. Allora: $\mathcal{M} \not\models_w \neg\neg(\neg\neg p\ top)$. Infatti, $\mathcal{M} \models_v p$, $\mathcal{M} \models_v \neg\neg p \to p$, $\mathcal{M} \not\models_w \neg\neg p$, $\mathcal{M} \models_w \neg\neg p \to p$, $\mathcal{M} \not\models_w \neg(\neg\neg p \to p)$, $\mathcal{M} \not\models_w \neg\neg(\neg\neg p \to p)$,

Nota che se $\mathbb{C} = \emptyset$, allora sia $\perp \to q$ e $(p \wedge \neg p) \to q$ sono valide: infatti in ogni mondo coerente w abbiamo che $\mathcal{M} \not\models_w \perp$ e $\mathcal{M} \not\models_w p \wedge \neg p$.

Nel modello canonico $\mathcal{M}^M$ per M, poniamo $\mathbb{C} = \{w \in \mathbb{W} : \mathcal{M} \models_w \perp\}$. $\{\perp\}$ è $\mathcal{M}^M - (p \wedge \neg p)$-consistente, quindi $\mathbb{C} \neq \emptyset$.

(Nota. Nel modello canonico per I, $\mathbb{C} = \emptyset$ poichè se $\perp \in v$, allora v è inconsistente.)

VALIDITA'

$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$.

Supponiamo che $\mathcal{M} \models_w A \to B$, $\mathcal{M} \models_w A \to \neg B$. Due casi sono possibili: (i) $\mathcal{M} \models_w A$ e (ii) $\mathcal{M} \not\models_w A$. Nel primo caso, $\mathcal{M} \models_w B$ e $\mathcal{M} \models_w \neg B$, quindi $w \in \mathbb{J}$, e così $\mathcal{M} \models_w \neg A$. Nel secondo, se $\mathcal{M} \models_v A$ per qualche v tale che $w\mathbb{R}v$, allora ancora $\mathcal{M} \models_v B$ e $\mathcal{M} \models_v \neg B$ e $v \in \mathbb{J}$. Così $\mathcal{M} \models_w \neg A$. Altrimenti se nessun v siffatto esiste, deduciamo immediatamente che $\mathcal{M} \models_w \neg A$.

Facciamo vedere che $\neg\neg(A \vee \neg A)$ è minimalmente valido. Supponiamo che così non sia e che quindi

$\mathcal{M} \not\models_w \neg\neg(p \vee \neg p)$, per qualche p. Allora esiste un v ($w\mathbb{R}v$ e $v \notin \mathbb{C}$ e per ogni $z[v\mathbb{R}z$ e $\mathcal{M} \models_w (p \vee \neg p)$ implica $z \in \mathbb{C}]$).

Sia $v\mathbb{R}z$. Allora $\mathcal{M} \models_z p$, quindi $\mathcal{M} \models_z p \vee \neg p$, $z \in \mathbb{C}$ $\mathcal{M} \models_v \neg p$ $\mathcal{M} \models_v p \vee \neg p$, quindi $v \in \mathbb{C}$ in contraddizione col fatto che $v \notin \mathbb{C}$.

ULTERIORI AGGIUNTE

Si consideri J = I + $\neg A \vee \neg\neg A$.

J è completa rispetto alle K-strutture dirette: $w\mathbb{R}v$ e $w\mathbb{R}z$ implica che esiste un s tale che $v\mathbb{R}s$ e $z\mathbb{R}s$. Dobbiamo far vedere che tale proprietà è goduta da $\subseteq$ nel modello canonico per J. Sia dunque $w \subseteq v$ e $w \subseteq z$. Facciamo vedere che $v \cup z$ è $\perp$-consistente e quindi per il lemma di Lindenbaum che esiste un s che include $v \cup z$. Supponiamo che non lo sia e dunque che $J \vdash A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge B_1 \wedge \cdots \wedge B_m \to \perp$, ove $\{A_1 \ldots A_n\} \subseteq v$ e $\{B_1 \ldots B_m\} \subseteq z$. Allora

$J \vdash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to \neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_m)$, quindi $\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_m) \in v$. Poichè w è primo $\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_m) \in w$ oppure $\neg\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_m) \in w$, ma se $\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_m) \in w$, z sarebbe inconsistente e se $\neg\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_m) \in w$, v sarebbe inconsistente, il che è impossibile.

Si consideri $\mathrm{B} = \mathrm{I} + (A \to B) \vee (B \to A)$. B è completa rispetto alle K-strutture lineari: $w\mathbb{R}v$ e $w\mathbb{R}z$ implica che $z\mathbb{R}v$ oppure $v\mathbb{R}z$. Dobbiamo far vedere che tale proprietà è goduta da $\subseteq$ nel modello canonico per B. Sia dunque $w \subseteq v$ e $w \subseteq z$. Supponiamo per assurdo che non $z \subseteq v$ e non $v \subseteq z$. Dunque per qualche formula A e B, $A \in v$ e $A \notin z$ e $B \in z$ e $B \notin v$. Ma questo contraddice col fatto che $A \to B \in w$ oppure $B \to A \in w$.