Da *Intuitionism.An introduction* di A.Heyting, 1966.
(Traduzione di Alberto Cozzi)

20 dicembre 2006

Personaggi del dialogo: Class, Form, Int, Letter, Prag, Sign.

I
Dibattito

CLASS. Come va, Mr. Int? Non hai abbandonato la città in una giornata estiva bella come questa? INT. Avevo qualche idea e ci ho lavorato su in biblioteca.
CLASS. Ape industriosa! Come sta procedendo?
INT. Abbastanza bene. Ci prendiamo un drink?
CLASS. Grazie. Ci scommetto che hai lavorato a quel tuo passatempo, il rifiuto del terzo escluso, e al resto. Non ho mai capito perché la logica dovrebbe essere affidabile da qualunque altra parte, ma non in matematica.
INT. Abbiamo parlato di questo argomento prima. L'idea che per la descrizione di certi tipi di oggetti un'altra logica sarebbe più adeguata rispetto a quella abituale è stata talvolta discussa. Ma fu Brouwer per primo a scoprire un oggetto che di fatto richiede un diverso tipo di logica, cioè la costruzione matematica mentale [L. E. J. Brouwer 1908]. Il motivo è che in matematica noi trattiamo fin dall'inizio con l'infinito, mentre la logica ordinaria è fatta per ragionare intorno a insiemi finiti.
CLASS. Lo so, ma ai miei occhi la logica è universale e si applica all'infinito allo stesso modo che al finito.
INT. Dovresti considerare qual era il programma di Brouwer [L. E. J. Brouwer 1907]. Consisteva nell'indagare le costruzioni matematiche mentali come tali, senza riferimento a questioni riguardanti la natura dei concetti complessi, quasi come se questi oggetti esistessero indipendentemente dalla nostra conoscenza di essi. Questo punto di vista porta immediatamente al rifiuto del principio del terzo escluso; te lo posso dimostrare meglio con un esempio. Confrontiamo due definizioni di numeri naturali, diciamo k e l.
I. k è il più grande numero primo tale che $k-1$ sia ancora un numero primo, o $k=1$ se non esiste tale numero.
II. l è il più grande numero primo tale che $l-2$ sia ancora un numero primo, oppure $l=1$ se questo numero non esiste.
La matematica classica tralascia totalmente la ovvia differenza di genere tra queste due definizioni. k può essere di fatto calcolato ($k=3$), mentre non possediamo nessun metodo per calcolare l, come se non fosse noto che per una sequenza di coppie di numeri primi coniugati p, $p+2$ è finita o no. Quindi gli intuizionisti rifiutano la 2 come una definizione di un numero intero; essi considerano un numero intero ben definito solo se è dato un metodo per calcolarlo. Questa linea di pensiero porta al rifiuto del principio del terzo escluso, perché se la sequenza di numeri primi coniugati fosse o finita o infinita, la II definirebbe un numero intero.
CLASS. Qualcuno potrebbe obiettare che l'estensione della nostra conoscenza riguardo l'esistenza o la non esistenza di un'ultima coppia di numeri primi coniugati è puramente contingente e completamente irrilevante in questioni riguardanti la verità matematica. O esiste un'infinità di tali coppie, e in questo caso $l=1$; oppure il loro numero è finito, e in questo caso l è il più grande

numero primo tale che $l-2$ è ancora un numero primo. In ogni caso concepibile l è definito; che cosa conta se di fatto possiamo o non possiamo calcolare questo numero?

Int. Il tuo argomento è di natura metafisica. Se "esistere" non significa "essere costitruito", deve avere qualche significato metafisico. Non può essere compito della matematica quello di indagare questo significato o di decidere se è sostenibile o no. Non abbiamo obiezioni contro un matematico che privatamente ammetta qualsiasi teoria metafisica egli voglia, ma dal programma di Brouwer consegue che noi studiamo la matematica come qualcosa di più semplice, più immediato della metafisica. Nello studio delle costruzioni matematiche mentali "esistere" deve essere sinonimo di "essere costituito".

Class. Ma è da dire, finché non sappiamo se esiste un'ultima coppia di numeri primi coniugati, la II non è la definizione di un numero intero, ma appena questo problema è risolto, essa diventa istantaneamente tale definizione. Supponi che il 1 Gennaio 1970 fosse provato che esiste un'infinità di numeri primi coniugati; da quel momento $l=1$. Era $l=1$ anche prima di quella data o no? [Menger 1930]

Int. Un'asserzione matematica afferma il fatto che una certa costruzione matematica è stato effettuata. E' chiaro che prima che venga effettuata, non esiste. Applicando quest'osservazione al tuo esempio, noi vediamo che prima del 1 Gennaio 1970 non è stato provato che $l=1$. Sembra che per chiarire ulteriormente il senso della questione tu ti debba riferire ancora a concetti metafisici: a qualche mondo di oggetti matematici esistente indipendentemente dalla nostra conoscenza, in cui $l=1$ è vera in qualche senso assoluto. Ma ripeto che la matematica non deve dipendere da nozioni come queste. Infatti tutti i matematici e anche gli intuizionisti sono convinti che in qualche senso la matematica dia alla luce verità eterne, ma quando qualcuno certa di definire precisamente questo senso, rimane invischiato in un labirinto di difficoltà metafisiche. L'unico modo per evitare questo inconveniente sembra il fatto di bandirle dalla matematica. Questo è quello che intendevo quando dicevo che studiamo le costruzioni matematiche come tali e che per questo studio la logica classica è inadeguata.

Class. Ecco qui i nostri amici Form e Letter. Ragazzi, stiamo facendo una discussione molto interessante sull'intuizionismo.

Letter. Potremmo mai parlare di qualcos'altro con il buon vecchio Int? Questo argomento lo ha completamente preso.

Int. Una volta che sei stato colpito dalla bellezza di una materia, dedicale la tua vita!

Form. Proprio cosi! Vorrei solo sapere cosa ci può essere di bello in una materia così indefinita come l'intuizionismo. Nessuno dei vostri termini è ben definito, e nemmeno date regole esatte di derivazione. Così si rimane sempre nel dubbio riguardo a quali ragionamenti siano corretti e quali no [R. Carnap 1934, p.41; 1937 p.46] [W. Dubislav 1932, p.57,75]. Nel linguaggio quotidiano nessuna parola ha un significato perfettamente definito; c'è sempre una certa dose di libertà, tanto migliore, più astratto sarà il concetto. Ciò ha come conseguenza il fatto che le persone non comprendano i pensieri degli altri, come succede nei ragionamenti matematici non formalizzati. L'unica maniera per raggiungere un rigore assoluto è quella di astrarre ogni significato dagli enunciati matematici e di considerarli per la loro stessa essenza, come stringhe di segni, tralasciando il significato che possono eventualmente avere. In questo modo è possibile formulare regole definite per dedurre nuovi enunciati da quelli che già si conoscono ed evitare i risultati incerti prodotti dall'ambiguità del linguaggio.

Int. Vedo la differenza tra il formalismo e l'intuizionismo essenzialmente come una questione di gusti. Anche voi usate ragionamenti sensati in quella materia che Hilbert chiama metamatematica, ma il vostro scopo è quello di separare questi ragionamenti dalla pura matematica formale e di limitare voi stessi a trattare dei ragionamenti nella loro più semplice forma possibile. Noi, al contrario, siamo interessati non al lato formale della matematica, ma invece a quel tipo di ragionamenti che appaiono in metamatematica; proviamo a svilupparli fino alle loro ultime conseguenze. Questa preferenza nasce dalla convinzione che si trovi in questo ambito una delle facoltà fondamentali della mente umana.

Form. Se tu non vorrai litigare sul formalismo, nemmeno lo farò io con l'intuizionismo. I formalisti sono tra le persone più pacifiche esistenti a questo mondo. Qualsiasi teoria può essere formalizzata e diventa così oggetto del nostro metodo. Anche la matematica intuizionista può

essere e sarà trattata in questo modo [R. Carnap 1934, p.44; 1937 p.51].
Class. E' come dire che la matematica intuizionista dovrebbe essere studiata come parte della matematica. All'interno della matematica noi indaghiamo le conseguenze di date assunzioni; le assunzioni intuizionistiche possono essere interessanti, ma non hanno nessun diritto a creare un monopolio.
Int. E non lo pretendiamo; siamo contenti se ammettete la giustezza della nostra concezione. Ma devo protestare contro l'affermazione che l'intuizionismo parta da assunzioni definite, più o meno arbitrarie. Il suo oggetto, il pensiero matematico costruttivo, determina univocamente le sue premesse e le colloca al di là, non all'interno della matematica, che studia un altro oggetto, qualunque esso possa essere. Per questa ragione un' accordo tra formalismo e intuizionismo nel senso della formalizzazione della matematica intuizionistica non può esistere. E' vero che anche in matematica intuizionista la parte finita di una teoria può essere formalizzata. Sarebbe utile però riflettere un attimo sul senso di tale formalizzazione. Potremmo considerare il sistema formale come l'espressione linguistica, in un particolare linguaggio adeguato agli scopi, del pensiero matematico. Se adottiamo questo punto di vista, ci scontriamo contro l'ostacolo della fondamentale ambiguità del linguaggio. Come il significato di una parola non può essere fissato in modo abbastanza preciso da escludere ogni possibilità di fraintendimento, noi non potremmo mai essere matematicamente certi che il sistema formale esprima correttamente i nostri pensieri matematici. Ciononostante, cambiamo punto di vista. Potremmo considerare il sistema formale stesso come una struttura matematica estremamente semplice; le sue entità (i simboli del sistema) sono associate con altre, spesso molto complicate, strutture matematiche. In questo modo la formalizzazione potrebbe essere condotta all'interno della matematica, diventando così un potente strumento matematico. Chiaramente non si può mai essere sicuri che un sistema formale rappresenti pienamente qualsiasi dominio del pensiero matematico; al momento la scoperta di nuovi metodi di ragionamento potrebbe imporci l'ampliamento del sistema formale.
Form. Per diversi anni questa situazione ci è stata famigliare. Il teorema di incompletezza di Gödel ci ha mostrato come qualsiasi sistema formale coerente riguardante la teoria dei numeri può essere esteso coerentemente in molti modi.
Int. La differenza è che l'intuizionismo procede indipendentemente dalla formalizzazione, che può però seguire dopo la costruzione matematica.
Class. Ciò che mi rende maggiormente perplesso è che sembrate entrambi partire dal niente. Sembra che stiate costruendo castelli in aria. Come potete sapere se i vostri ragionamenti sono esatti se non avete a disposizione l'infallibile criterio dato dalla logica? Giusto ieri parlavo con Sign che è ancora più relativista di voi. E' cosi scivoloso che nessuna argomentazione fa presa su di lui, e non raggiunge mai nessuna conclusione solida. Temo questo destino per chiunque scarti il supporto della logica, che è di senso comune.
Sign. Si parla del diavolo e spuntano le sue corna. Stavate parlando male di me?
Class. Parlavo della discussione di ieri. Oggi me la sto prendendo con questi altri due dannati relativisti.
Sign. Sono felice di partecipare a questo lavoro, ma prima sentiamo le repliche dei tuoi oppositori. Vi presento il mio amico Prag; sarà interessato alla discussione.
Form. Come va? Siete anche voi un filosofo della scienza?
Prag. Odio la metafisica.
Int. Benvenuto, fratello!
Form. Preferirei non difendere al momento la mia posizione, visto che la nostra discussione ha riguardato principalmente l'intuizionismo e potremmo facilmente confonderci. Ma ho paura che tu sia nel torto come riguardo alla logica intuizionistica. Essa è già stata formalizzata e in questo campo sono state scritte opere di gran valore da numerosi autori. Questo sembra provare che gli intuizionisti stimano la logica più importante di quanto pensi, sebbene voi siate abituati ad un altro tipo di logica.
Int. Mi dispiace contraddirti. La logica non è il campo che mi riguarda. Come potrebbe essere? Essa necessiterebbe di un fondamento, che implicherebbe principi più intricati e meno diretti di quelli della matematica stessa. Una costruzione deve essere immediata alla mente e i suoi risultati così chiari che non necessiti di un ulteriore fondamento. Si dovrebbe conoscere molto bene se un

ragionamento sia corretto senza usare qualunque logica; basta una chiara coscienza scientifica. E' pur vero che è stata sviluppata una logica intuizionistica. Per mostrarvi il suo significato, lasciate che vi faccia un esempio. Chiamiamo A la proprietà di un numero intero di essere divisibile per 8, B l'essere divisibile per 4, C per 2. Al posto di $8a$ potremmo scrivere $4 \times 2a$; da questa costruzione matematica P noi vediamo che dalla proprietà A segue B ($A \to B$). Una costruzione simile Q mostra che $B \to C$. Applicando prima P e poi Q (giustapposizione di P e Q) otteniamo che $8a = 2 \times (2 \times 2a)$ mostrando che $A \to C$. Questo processo rimane valido se ad A, B e C sostituiamo proprietà arbitrarie: se la costruzione P mostra che $A \to B$ e Q mostra che $B \to C$, allora la giustapposizione di P e Q mostra che $A \to C$, abbiamo ottenuto un teorema della logica. Il processo da cui è dedotto mostra che non differisce essenzialmente da un teorema matematico; è solo più generale, nello stesso modo in cui "l'addizione di due termini è commutativa" è un enunciato più generale di "$2 + 3 = 3 + 2$". Si procede allo stesso modo per ogni teorema della logica: non è che un teorema matematico di estrema generalità; infatti è da dire che la logica non è che una parte della matematica, e non può in nessun modo esserne il fondamento. Alla fine è questa la concezione di logica a cui sono naturalmente portato; può essere possibile e desiderabile sviluppare altri tipi di logica per altri scopi. E' la logica matematica appena descritta ad esser stata formalizzata. Il risultante sistema formale prova di avere particolari proprietà, molto interessanti se comparate a quelle di altri sistemi di logica formale. Questo fatto ha portato alle indagini a cui alludeva Mr. Form che, sebbene interessanti, sono collegate ma molto indirettamente alla matematica intuizionistica.

Letter. Secondo la mia opinione tutti questi problemi sono immaginari o artificiosi. La matematica è qualcosa di abbastanza semplice. Si definiscono dei segni e si danno delle regole per combinarli assieme; tutto qua.

Form. Vorrai allora avere qualche tipo di dimostrazione che provi la consistenza del tuo sistema formale.

Letter. Perché dovrei volerlo dimostrare? Non dimenticarti che i nostri sistemi formali sono costruiti pensando alle loro applicazioni ed in generale si dimostrano utili; ciò sarebbe difficile da spiegare se qualsiasi formula fosse in essi deducibile. In tal modo abbiamo una convinzione pratica sulla consistenza che è sufficiente per il nostro lavoro. Quello che contesto all'intuizionismo è il pensare che la matematica abbia qualcosa a che fare con l'infinito. Posso scrivere un segno, diciamo α, e identificarlo come il numero cardinale dei numeri interi. Dopodiché posso fissare regole per la sua manipolazione del tipo di quelle che Mr. Class usa per questa nozione; ma facendo questo opero completamente nel finito. Fino a che è coinvolta l'idea di infinito le nostre dimostrazioni sono oscure e confuse. Di conseguenza tutte le asserzioni intuizionistiche riguardo all'infinito mi sembrano altamente ambigue, ed è anche discutibile che un segno come $10^{10^{10}}$ abbia qualche altro significato se non quello di un segno su carta su di cui operiamo in accordo con determinate regole [J. Dieudonné 1949].

Int. Certamente il tuo estremo finitismo garantisce la massima sicurezza contro eventuali malintesi, ma ai nostri occhi implica una limitazione di significato difficile da accettare. Perfino i bambini alle elementari comprendono cosa sono i numeri naturali e accettano il fatto che la sequenza dei numeri naturali possa continuare indefinitamente.

Letter. Viene suggerito loro che comprendono.

Int. Questa non può essere un obbiezione, perché allora qualsiasi comunicazione di significati del linguaggio può essere interpretata come suggerimento. Anche Euclide nella 20-esima proposizione del Libro IX, quando dimostra che l'insieme dei numeri primi è infinito, sapeva di cosa stava parlando. Questa nozione semplice di numeri naturali, famigliare a qualsiasi essere pensante, è fondamentale per la matematica intuizionista. Certo non richiediamo per essa una qualche forma di certezza o di determinazione in senso assoluto, che sarebbe irrealizzabile, ma sosteniamo che è sufficientemente chiara per costruirci sopra una matematica.

Letter. La mia obbiezione è che voi non supponiate troppo poco, come pensa Mr. Class, ma troppo. Partite da certi principi che prendete come intuitivamente chiari senza alcuna ulteriore spiegazione e rifiutate altri modi di ragionare senza dare nessuna motivazione a questa discriminazione. Per esempio, a molte persone il principio del terzo escluso sembra perlomeno tanto evidente quanto quello di induzione completa. Perché allora rifiutate il primo e accettate il secondo? Una tale immotivata scelta dei principi primi dà al vostro sistema un carattere fortemente dogmatico.

INT. Di fatto le asserzioni intuizionistiche possono sembrare dogmatiche a chi le interpreti come asserzioni su fatti, ma non sono intese in questo senso. La matematica intuizionistica consiste, come ho già spiegato a Mr. Class, in costruzioni mentali. Un teorema matematico esprime un fatto puramente empirico, cioè il successo di una determinata costruzione. "2+2=3+1" deve essere letto come l'abbreviazione dell'enunciato: "Ho risolto la costruzione mentale indicata da "2+2" e quella indicata da "3+1" e ho trovato che queste portano allo stesso risultato". Adesso dimmi dove può intervenire qui la dogmaticità; non nella costruzione mentale stessa, che è chiaramente e per sua stessa natura un attività, ma neanche nell'enunciato riguardo alle costruzioni, poiché esse esprimono risultati puramente empirici.

LETTER. Quindi tu sostieni ancora che queste costruzioni mentali portino a qualche tipo di verità; certo non sono una partita a solitario, ma dovrebbero essere in qualche senso un valore per l'umanità, o saresti in errore ad annoiarci con esse. E' in questa pretesa che io vedo l'elemento dogmatico. L'intuizione matematica vi ispira verità eterne e oggettive; in questo senso il vostro punto di vista non è solo dogmatico ma anche teologico [H.B. Curry 1951 p.6].

INT. Per prima cosa, le mie idee matematiche appartengono alla mia vita intellettuale individuale e sono confinate nella mia mente, come per qualsiasi altro pensiero simile. Siamo generalmente convinti che le altre persone abbiano pensieri simili ai nostri e che ci possano comprendere quando esprimiamo questi pensieri in parole, ma sappiamo anche che non siamo mai abbastanza sicuri di essere capiti senza fraintendimenti. Da questo punto di vista, la matematica non differisce essenzialmente dalle altre materie; se per questa ragione consideri la matematica essere dogmatica, dovresti chiamare dogmatico qualsiasi ragionamento umano. La caratteristica del pensiero matematico è che esso non esprime verità sul mondo esterno, ma solamente riguardo alle costruzioni mentali. Dobbiamo quindi distinguere tra la semplice pratica matematica e la sua valutazione. Per costruire teorie matematiche non c'è bisogno di nessuna premessa filosofica, ma il valore da attribuire a questa attività dipende dalle nostre concezioni filosofiche.

SIGN. Nel modo con cui tratti il linguaggio porti indietro l'orologio. Il linguaggio primitivo aveva quel carattere fluttuante e instabile che tu descrivi, e il linguaggio comune è ancora per la maggior parte dello stesso tipo, ma dal momento in cui si innestano pensieri scientifici interviene la formalizzazione del linguaggio. Negli ultimi decenni i significisti hanno studiato questo processo. Non si è ancora giunti alla fine, poiché si stanno tuttora costruendo linguaggi più strettamente formalizzati.

INT. Se davvero la formalizzazione del linguaggio è l'andamento della scienza, allora la matematica intuizionista non appartiene in questo senso alla scienza. E' più un fenomeno della vita, un'attività naturale dell'uomo, essa stessa pronta ad essere studiata dai metodi scientifici; è stata infatti studiata da tali metodi, rispettivamente dal ragionamento formalistico intuitivo e dal metodo significista, ma è ovvio che questi studi non appartengono alla matematica intuizionista, né i suoi risultati. E' chiaro che un tale esame scientifico della matematica intuizionista non produrrà mai una completa e definita descrizione di essa, non più di quanto una teoria completa degli altri fenomeni sia raggiungibile. Anche se queste considerazioni meta-intuizionistiche possono essere interessanti e utili, non possono essere incorporate nella matematica intuizionistica stessa. Chiaramente queste osservazioni non si applicano alla formalizzazione interna alla matematica, come la ho descritta qualche momento fa.

PRAG. Mi lasci sottolineare ciò che Mr. Sign ha detto giusto adesso. La scienza procede tramite formalizzazione del linguaggio; essa usa questo metodo perché è efficiente. In particolare la moderna teoria della completa formalizzazione del linguaggio si è rivelata la più utile del suo genere. L'ideale del moderno scienziato è quello di preparare un arsenale di sistemi formali pronti per l'uso, per cui possa scegliere, per ogni teoria, il sistema che rappresenti correttamente i risultati sperimentali. I sistemi formali dovrebbero essere giudicati secondo questo criterio di utilità e non da una arbitraria e vaga interpretazione, che è preferita per ragioni dogmatiche e metafisiche.

INT. Sembra abbastanza ragionevole giudicare un sistema formale dalla sua utilità. Ammetto che da questo punto di vista l'intuizionismo ha poche possibilità di essere accettato, perché sarebbe prematuro abbattere le poche deboli indicazioni che potrebbero essere di qualche utilità in fisica

[J.L. Destouches 1951]; ai miei occhi è maggiore la probabilità che essa sia utile in filosofia, storia e nelle scienze sociali. Infatti la matematica, dal punto di vista intuizionista, è lo studio di certe funzioni della mente umana, e riguardo a ciò è vicina a queste ultime scienze. Ma è davvero l'utilità l'unica misura di valore? E' facile menzionare una serie di attività di valore che in nessun modo aiutano la scienza, come l'arte, lo sport, e i divertimenti leggeri. Noi attribuiamo all'intuizionismo un valore di questo tipo, che è difficile da definire in anticipo, ma che si sente chiaramente trattando con la materia. E' noto come i filosofi si rompano la testa sul problema del concetto di valore in arte; ma anche ogni persona educata avverte questo valore. Il caso è analogo per il valore della matematica intuizionista.

FORM. Per molti matematici questo valore è affetto fatalmente dal fatto che distruggete i più preziosi risultati matematici; un metodo di valore per la fondazione della matematica dovrebbe salvare il più possibile questi risultati [D.Hilbert 1922]. Ciò può anche capitare per i metodi costruttivisti; sono concepibili anche altre definizioni di costruttività rispetto a quelle difese dagli intuizionisti. Per questo anche l'attuale numero esiguo di intuizionisti non si trova completamente in accordo riguardo la delimitazione del costruttivismo. L'esempio più eclatante è il rifiuto da parte di Griss del concetto di negazione, che altri intuizionisti accettano come perfettamente chiaro [H. Freudenthal 1934A][G.F.C. Griss 1946 p.24; 1946A]. Sembra probabile, d'altra parte, che una qualunque concezione più liberale del costruttivismo potrebbe portare al salvataggio di parti vitali della matematica classica.

INT. Dato che gli intuizionisti usano un linguaggio non formalizzato, ci si possono aspettare tra di essi lievi divergenze di opinioni. Sebbene esse siano sorte prima e in forme più acute rispetto a quanto avessimo potuto prevedere, non sono per niente allarmanti, poiché riguardano punti secondari e non intaccano le idee fondamentali, sulle quasi vi è completa concordia. Perciò è molto inverosimile che una più ampia concezione di costruttività possa ottenere il favore degli intuizionisti. Riguardo alla mutilazione della matematica di cui parli, deve essere presa come una conseguenza inevitabile dei nostri capisaldi. Può essere anche vista come l'amputazione di ornamenti nocivi, belli nella forma ma vuoti nella sostanza, ed è alla fine parzialmente compensata dal fascino delle sottili distinzioni e degli arguti metodi con cui gli intuizionisti hanno arricchito i ragionamenti matematici.

FORM. Il nostro dibattito ha assunto le sembianze di una discussione sui valori. Ricavo dalle tue parole che sei pronto a riconoscere il valore di altre concezioni di matematica, ma che rivendichi per la tua un valore in sé. Dico bene?

INT. Infatti l'unico punto di vista positivo riguardo alla fondazione della matematica a cui mi oppongo è che la matematica classica abbia un significato chiaro; devo confessare che non riesco a capirlo. Ma anche coloro che affermano di comprenderlo potrebbero essere ancora capaci di afferrare il nostro punto di vista e di valutare il nostro operato.

LETTER. E' ben mostrato dai paradossi come la matematica classica non sia perfettamente chiara.

FORM. Sì, ma il criticismo intuizionista va molto oltre a ciò che basterebbe per evitare i paradossi; Mr. Int non li ha nemmeno nominati come argomento a sostegno della sua concezione e senza dubbio ai suoi occhi la consistenza non è che un benaccetto sottoprodotto dell'intuizionismo.

SIGN. Tu descrivi la tua attività come costruzione mentale, Mr. Int, ma i processi mentali sono osservabili solo tramite gli atti a cui portano, nel tuo caso tramite le parole con cui parli e le formule che scrivi. Ciò non vuol forse dire che l'unico modo per studiare l'intuizionismo sia quello di studiare il sistema formale che esso costruisce?

INT. Quando guardo a quell'albero lassù, sono convinto di vedere un albero, e mi costa notevole fatica il rimpiazzare questa convinzione con la conoscenza che in realtà onde luminose raggiungono i miei occhi, portandomi la costruzione dell'immagine di un albero. Allo stesso modo, parlandoti, sono convinto di sostenere le mie opinioni con te, ma tu mi insegni che in realtà produco vibrazioni nell'aria, che ti spingono a compiere determinate azioni, cosi da produrre altre vibrazioni. In entrambi i casi la prima è la visione naturale, la seconda la costruzione teorica. Si dimentica troppo spesso che la verità di tali costruzioni dipende dallo stato presente della scienza e le parole "in realtà" dovrebbero essere sostituite con "in accordo con la attuale visione scientifica". Perciò preferisco aderire all'idea secondo cui, descrivendo la matematica intuizionista, comunico pensieri ai miei ascoltatori; queste mie parole non devono essere prese nel senso di qualche sistema filosofico, ma nel senso della vita di tutti i giorni.

SIGN. Quindi l'intuizionismo, come forma di interazione tra uomini, è un fenomeno sociale e i suoi studi appartengono alla storia della civilizzazione.

INT. I suoi studi, non la sua pratica. Su questo punto sono d'accordo con Mr. Prag: primum vivere, deindre philosophari, e se vogliamo possiamo lasciare quest'ultima attività ad altri. Lasciamo a quelli che verranno dopo di noi l'interrogarsi sul perché io abbia costituito queste costruzioni mentali e come possono essere interpretate all'interno di qualche filosofia; sono appagato nel costruirle nella convinzione che in qualche modo contribuiranno alla chiarificazione dei ragionamenti umani.

PRAG. E' un errore comune dei filosofi quello di parlare di cose che non conoscono se non imperfettamente, e noi siamo andati vicini a cadere in quella trappola. Vorrà Mr. Int darci qualche esempio di ragionamento intuizionistico, in modo che si possa giudicare meglio la qualità della cosa?

INT. Certamente, e sono anche convinto che qualche lezione vi darà una capacità di discernimento migliore rispetto a tediose discussioni. Posso chiedere a quei gentiluomini che sono interessati alle mie spiegazioni di seguirmi nella mia classe?

Note finali del traduttore

Mr. Class = Matematico classico (Cantor, Dedekind)
Mr. Int = Matematico intuizionista (Brouwer)
Mr. Form = Matematico formalista (Hilbert)
Mr. Letter = Matematico letterale
Mr. Prag = Matematico pragmatista
Mr. Sign = Matematico significista