Il concetto di infinito in matematica
Gerhard Gentzen, 1936-37

29 dicembre 2006

(Traduzione di Alberto Cozzi da *The concept of infinity in mathematics* in Szabo *The collected papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, 1969. L'originale è *Der Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik*, Semester-Berichte, Münster in/W., 9th Semester, Winter 1936-37, 65-80)

La grande controversia che si è accesa negli ultimi decenni riguardo ai fondamenti della matematica è soprattutto una controversia riguardo alla natura del concetto di infinito in matematica. Nel seguito tenterò di caratterizzare nel modo meno tecnico possibile gli specifici problemi che ne sono coinvolti.

Per prima cosa darò una *classificazione della matematica* in tre distinti livelli a seconda del grado in cui la nozione di 'infinito' è usata nei vari rami della matematica. Il primo e più basso livello è rappresentato dalla teoria elementare dei numeri, cioè dalla teoria dei numeri che non fa uso di tecniche proprie dell'analisi. L'infinito è qui presente nella sua forma più semplice. Si tratta di una successione infinita di oggetti, ovvero i numeri naturali. Parecchi altri rami della matematica sono logicamente equivalenti alla teoria elementare dei numeri, esattamente tutte quelle teorie i cui oggetti possono essere messi in corrispondenza biunivoca coi numeri naturali e che sono perciò 'numerabili'. Quasi tutta l'algebra vi appartiene - dopotutto si può dimostrare che i numeri razionali, i numeri algebrici, anche i polinomi sono numerabili - così come la topologia combinatoria, ad esempio, cioè quella parte della topologia che tratta solo con oggetti le cui proprietà sono descrivibili con un numero finito di dati. Il ben noto problema dei quattro colori appartiene qui. Tutta queste teorie sono, logicamente parlando, completamente equivalenti. E' quindi sufficiente trattare con la sola teoria elementare dei numeri; i teoremi e le dimostrazioni delle restanti teorie possono essere reinterpretati come teoremi e dimostrazione di teoria dei numeri tramite una correlazione dei loro oggetti con i numeri naturali. Al problema dei quattro colori, ad esempio, corrisponde di fatto un equivalente problema di teoria dei numeri, benché il nostro speciale interesse per esso derivi naturalmente soltanto dalla sua formulazione topologica intuitiva.

Il secondo livello della matematica è rappresentato dall'*analisi*. Per quanto riguarda l'applicazione del concetto di infinito, la caratteristica sostanzialmente nuova qui sta nel fatto che ora anche gli *oggetti individuali* della teoria possono essere essi stessi insiemi infiniti. I numeri reali, cioè gli oggetti dell'analisi, sono dopo tutto definiti come insiemi infiniti, di solito come successioni infinite di numeri razionali. E non fa differenza se la particolare definizione scelta è quella via intervalli che si includono l'uno nell'altro, o sezioni di Dedekind, o qualche altro procedimento. Appartiene a questo livello anche l'intera teoria delle funzioni complesse; niente di essenzialmente nuovo viene aggiunto. Il terzo livello di applicazione del concetto di infinito si incontra, infine, nella teoria generale degli insiemi. Qui sono ammessi come oggetti non solo i numeri naturali e altre quantità descrivibili in modo finito, come al primo livello, ma anche insiemi infiniti di questi, come al secondo livello, e, in aggiunta, insiemi infiniti di insiemi infiniti e ancora insiemi di tali insiemi, ecc., nella massima generalità concepibile.

La classificazione data sussume tutti i rami della matematica. Per quanto riguarda la geometria, ad esempio, essa non presenta più oggi particolari problemi relati al concetto di infinito. Ciò che può apparire come un tale problema appartiene alla fisica o occorre in forme equivalenti nell'analisi; le diverse geometrie possono dopotutto essere sempre interpretate in termini di modelli logicamente equivalenti presi dall'analisi.

Vi sono essenzialmente due interpretazioni fondamentalmente diverse della natura dell'infinito in matematica, che ora vi descriverò. Le chiamerò l'interpretazione 'attualista' (*an sich*) e l'interpre-tazione 'costruttivista' (*konstruktiv*) dell'infinito. La prima è l'interpretazione della matematica classica come l'abbiamo tutti imparata all'Università. Numerosi matematici hanno adottato la posizione costruttivista - sebbene non sempre nella stessa misura - tra cui Kronecker, Poincaré, Brouwer e Weyl. Questi nomi da soli indicano che abbiamo a che fare con una corrente di pensiero da prendersi davvero molto sul serio. Cercherò di far emergere l'essenza della posizione costruttivista vis-à-vis con l'interpretazione attualista; nel poco tempo disponibile ciò potrà essere fatto solo imperfettamente, specialmente tenendo conto che per la sua grande familiarità, l'interpretazione attualista è diventata per noi una seconda natura e non è facile adottare, per una volta, un modo di pensare assai differente.

Comincerò con le antinomie della teoria degli insiemi. Abbiamo qui una situazione in cui considerazioni attualiste hanno portato ad un assurdo che non sarebbe potuto emergere da una interpretazione costruttivista. Infatti sulla base del concetto del tutto generale di insieme che è stato presentato prima è possibile formare, ad esempio, anche il concetto di 'insieme di tutti gli insiemi'; questo è un insieme correttamente definito. Pur tuttavia da esso seguono, comprensibilmente, delle contraddizioni: l'insieme di tutti gli insiemi deve dopotutto contenere se stesso come elemento e in un certo senso - che può facilmente essere reso preciso - deve essere più grande di se stesso, e ciò ovviamente non può essere il caso. Ad un'esame più accurato si palesa facilmente da dove viene l'assurdità: strettamente parlando , 'l'insieme di tutti gli insiemi' non deve essere considerato esso stesso come appartenente agli insiemi; è una formazione successiva, per così dire, che produce una collezione completamente nuova da una data totalità di insiemi. E' questa di fatto la visione costruttivista del problema: nuovi insiemi possono, in linea di principio, essere formati solo costruttivamente uno per uno, sulla base di insiemi già costruiti. Stando alla visione attualista, invece, tutti gli insiemi sono definiti fin dall'inizio dal concetto astratto di insieme e sono quindi già disponibili 'come tali' (*an sich*) del tutto indipendentemente da come singoli insiemi possano essere selezionati da essi per mezzo di speciali costruzioni. Questo punto di vista ha portato all'antinomia.

Se dovessimo provare ad esprimere l'essenza della posizione costruttivista in un principio il più generale possibile, la formuleremmo circa come segue: 'Qualcosa *infinito* non deve mai essere ritenuto come *completato*, ma solo come qualcosa *in divenire*, che può essere perfezionato[1] di più in più in modo costruttivo'. Ricordo il famoso detto di Gauss che 'l'uso di una quantità infinita come qualcosa di completo non è mai permesso in matematica'.

Se si accetta di interpretare l'infinito costruttivamente, allora le differenze vis-à-vis l'interpreta-zione attualista della matematica classica si manifestano non solo nella teoria degli insiemi, ma già nella teoria elementare dei numeri. Discuterò ora queste differenze in maggior dettaglio. Nella teoria elementare dei numeri incontriamo l'infinito solo nella sua forma più semplice, cioè come successione infinita di numeri naturali. Stando all'interpretazione attualista, possiamo considerare questa successione come una totalità infinita completa, mentre l'interpretazione costruttivista ci permette solo di dire: noi *possiamo* progredire sempre più nella successione dei numeri e costruire sempre nuovi numeri, ma non dobbiamo parlare di una totalità completa[2]. Una proposizione come 'tutti i numeri naturali hanno la proprietà β', per esempio, ha in ognuno dei casi un significato in qualche modo differente. Secondo l'interpretazione attualista : la proprietà β vale per ogni numero che possa in qualche modo essere estratto dalla totalità completa dei numeri. Secondo l'interpretazione costruttivista invece possiamo solo dire che: non importa quanto andiamo avanti nella formazione di nuovi numeri, la proprietà β continua a valere per questi nuovi numeri.

Nella pratica, questa differenza tra le due interpretazioni è, comunque, irrilevante. Una proposizione relativa a tutti i numeri naturali si dimostra normalmente per induzione completa, e questa inferenza è manifestamente in armonia anche con l'interpretazione costruttivista; particolarmente per il fatto che l'induzione completa è basata dopotutto sull'idea del nostro *progredire* nella successione dei numeri. La situazione è diversa nel caso di *proposizioni esistenziali.* La proposizione 'esiste un numero naturale con la proprietà β' sta per, secondo l'interpretazione attualista: 'da qualche parte nella totalità completa dei numeri naturali occorre un tal numero'. Sulla base dell'interpretazione costruttivista una tale asserzione è ovviamente priva di senso. Ma ciò non significa che per questa interpretazione le proposizioni esistenziali debbano essere rifiutate completamente. Se un determinato numero n, per cui vale la proprietà β, può di fatto essere specificato, allora anche sotto questa interpretazione possiamo parlare dell'esistenza di un tale numero; in realtà, la proposizione esistenziale ora non si riferisce più alla totalità infinita dei numeri; sarebbe comunque sufficiente parlare solo dei numeri da 1 a n. Le dimostrazioni di esistenza che occorrono nella pratica dimostrano, in realtà, che un esempio può di fatto essere dato. Comunque, sono possibili anche dimostrazioni in cui questo non è il caso, cioè *dimostrazioni indirette di esistenza*: si assume che non vi siano numeri per i quali valga la proprietà β. Se questa assunzione porta a contraddizione, si inferisce che esiste dopotutto un numero per cui vale la proprietà β. Può allora succedere che una procedura effettiva per produrre di fatto un tale numero sia del tutto non ottenibile. Dal punto di vista costruttivista, una tale dimostrazione deve quindi

[1] nel senso di 'costruito', NdT.
[2] oppure completata, NdT.

essere rifiutata. Un'altra tecnica dimostrativa che diventa altrettanto inaccettabile da questo punto di vista e che viene di solito citata al riguardo, è l'applicazione della 'legge del terzo escluso' a proposizioni riguardanti una quantità infinita di oggetti. Secondo l'interpretazione costruttiva, per esempio, non potremmo nemmeno dire: 'Una proprietà β vale per tutti i numeri naturali o non vale per tutti i numeri naturali'. Il rifiuto della legge del terzo escluso sembra particolarmente paradossale, a prima vista, ma è solo la necessaria conseguenza dell'interpretare l'infinito in modo potenziale. Dopo tutto questa legge è basata sull'idea di una successione di numeri completa. Ciò non deve essere interpretato nel senso che i costruttivisti ritengono questa legge completamente *falsa*; dal loro punto di vista è più corretto ritenerla come *priva di senso.* Di conseguenza non ha senso alcuno parlare della totalità dei numeri come di qualcosa di completo, precisamente perché 'di fatto' la successione dei numeri non è mai completata, tutto ciò che ci è dato è un metodo per progredire estendibile indefinitamente.

In pratica queste forme di inferenza, che non sono ammissibili secondo l'interpretazione costruttivista, raramente occorrono nella teoria elementare dei numeri. La situazione è diversa in analisi e in teoria degli insiemi. Qui le differenze tra le due interpretazioni sono sostanzialmente le stesse di quelle descritte per i numeri naturali, quindi non le discuterò ulteriormente. Nell'analisi e nella teoria degli insiemi, comunque, la portata della differenza è considerevolmente maggiore, con la conseguenza che dal punto di vista costruttivista *notevoli* porzioni dell'analisi e quasi tutta la teoria degli insiemi non possono essere accettate.

A questo riguardo, si dovrebbe porre attenzione al fatto che il confine tra ciò che è costruttivisticamente permesso e ciò che non lo è non può essere definito inequivocabilmente in taluni casi limite e che le opinioni dei diversi matematici che aderiscono a questo punto di vista non sono tra loro identiche. Tuttavia queste differenze non sono così importanti rispetto al quadro generale da giustificare una discussione più dettagliata. Parole come "intuizionista" (Brouwer) e "finitista" (Hilbert) denotano posizioni costruttiviste in qualche modo diverse fra loro.

Ora la questione basilare diventa: quale delle due interpretazioni è di fatto corretta? Tutte e due sono difendibili. Da una parte abbiamo gli intuizionisti sotto l'egida di Brouwer con la tesi fortemente radicale che tutta la matematica che è incompatibile con il punto di vista costruttivista deve essere rigettata. Dall'altra, gran parte dei matematici sono comprensibilmente riluttanti a compiere un tale sacrificio. Le antinomie, così dicono, sono di fatto fondate su una formazione inammissibile di concetti; ma tali concetti possono essere evitati grazie ad una opportuna delimitazione; l'intera analisi e, *a fortiori*, la teoria dei numeri, così dicono, è completamente non obbiettabile. Sfortunatamente, la delimitazione delle inferenze non ammissibili può essere condotta in modi profondamente diversi senza che debbano necessariamente portare a un punto comune definito, e devo dire che per me la delimitazione più chiara e coerente sembra essere quella data dall'interpretazione costruttivista dell'infinito.

Dovremmo tuttavia essere riluttanti a rigettare l'estesa parte non-costruttiva dell'analisi che ha, tra le altre cose, passato con successo l'esame in una varietà di applicazioni in fisica. *Hilbert* vede nella sua *teoria della dimostrazione* uno strumento per risolvere queste difficoltà. Questa teoria intende chiarire quanto più possibile le relazioni reciproche tra le due interpretazioni dell'infinito per mezzo di pure *indagini matematiche*.

Come può essere fatto ciò? Il primo e più importante obbiettivo è quello di stabilire la *consistenza* della matematica, se tale consistenza sussiste. Abbiamo qui dopo tutto l'argomento più forte a favore dei costruttivisti: l'interpretazione attualista ha portato a contraddizioni nella teoria degli insiemi; chi lo sa se un giorno tali contraddizioni non possano comparire anche in analisi. Si potrebbe rispondere a questa obbiezione con una dimostrazione di consistenza per l'analisi. E' infatti del tutto concepibile che la consistenza di una teoria matematica possa essere dimostrata con precise tecniche matematiche. Per comprendere questo punto ripensiamo al fatto che una proposizione che asserisce la consistenza è formalizzabile come un'asserzione matematica; essa dice: non esiste alcuna *dimostrazione* all'interno della teoria che porti a contraddizione. Le 'dimostrazioni' in una teoria possono diventare oggetti di indagine matematica, ossia della 'teoria della dimostrazione', così come i numeri naturali, ad esempio, sono fatti oggetto della teoria dei numeri. A questo scopo solitamente si *formalizzano* le dimostrazioni, cioè si rimpiazzano le espressioni linguistiche nelle dimostrazioni con simboli e combinazioni di simboli definiti - alle inferenze corrispondono ora certi riarrangiamenti formali di combinazioni di simboli - così che alla fine otteniamo come controparte delle dimostrazioni particolari figure composte di simboli. Queste figure sono ora suscettibili di indagine matematica allo stesso modo delle figure geometriche. Per riuscire a dare una precisa delimitazione formale al concetto di 'dimostrazione in una teoria', è ovviamente essenziale, in particolar modo, che possa essere data fin dall'inizio una delimitazione delle *forme di inferenza* che occorrono nella dimostrazione.

In pratica, il numero di forme di inferenza usate in matematica è fortunatamente relativamente piccolo.

Se viene eseguita una dimostrazione di consistenza, alcune forme di inferenza devono certamente essere usate per questa dimostrazione. La correttezza di *queste* inferenze deve essere presupposta all'inizio, altrimenti l'intera dimostrazione sarebbe, ovviamente, circolare. Non può esistere nessuna dimostrazione di consistenza 'assoluta'. Quali tipi di inferenze debbano essere presupposte come corrette segue immediatamente dalle nostre considerazioni precedenti: le inferenze devono essere compatibili con il punto di vista *costruttivista*. L'affidabilità del punto di vista costruttivista è assunta e non messa in discussione. L'obbiettivo è poi di dimostrare la consistenza del punto di vista attualista per mezzo delle inferenze costruttive.

Recentemente sono riuscito a portare a termine una tale dimostrazione per la teoria elementare dei numeri, cioè per il primo dei tre livelli esistenti dei concetti di infinito[3]. Corrispondenti dimostrazioni devono ancora essere eseguite per l'analisi e per la teoria degli insiemi, nella misura in cui quest'ultima sia di fatto consistente. Nel corso di questa indagine di teoria della dimostrazione possiamo aspettarci di riuscire a comprendere più accuratamente quanto lontano possiamo spingerci senza incontrare antinomie e di trovare risposte a ulteriori questioni a ciò correlate.

Quale sarebbe la relazione tra le due interpretazioni dell'infinito, se la dimostrazione di consistenza fosse portata a termine? Anche allora si potrebbero sostenere opinioni diverse. Una possibilità sarebbe il ritenere la dimostrazione di consistenza

[3] 67

come ancora insufficientemente sicura facendo sorgere dubbi riguardo alle inferenze costruttive usate nella dimostrazione. Personalmente non ritengo questa obbiezione particolarmente pericolosa. *Qualcosa* si sarà pur sempre guadagnato se si è fatto vedere che l'affidabilità delle forme di inferenza della matematica dipende da un numero minimo di inferenze ragionevolmente incontestabili; fare di più è semplicemente impossibile; e sono certo che questa fondazione è considerevolmente più sicura di quella fornita dall'interpretazione attualista.

Più importante è un'altra obbiezione sollevata dagli intuizionisti: anche se fosse stata dimostrata la consistenza, le proposizioni della matematica attualista rimarrebbero *senza senso* e dovrebbero quindi venir rifiutate ora come prima. Una proposizione esistenziale dimostrata indirettamente, per esempio, è ritenuta senza senso; il motivo è che ad un'asserzione di esistenza si garantisce senso reale solo se un esempio può di fatto essere dato. E come può questo essere valutato? si dovrà ammettere che una proposizione esistenziale dimostrata indirettamente ha un senso diverso, più debole rispetto a una che è stata dimostrata costruttivamente; ma tuttavia un certo 'senso' è mantenuto. Inoltre, anche se non concediamo un senso immediato a proposizioni dimostrate non costruttivamente, rimane pur tuttavia la possibilità di usarle per dimostrare proposizioni semplici come equazioni numeriche direttamente verificabili, che certamente non sono prive di senso costruttivo; tali proposizioni devono allora essere vere in virtù della dimostrazione di consistenza e potrebbe accadere che una dimostrazione costruttiva diretta per la stessa proposizione sia più laboriosa o completamente inottenibile. Ciò sembrerebbe concedere alle forme di inferenza attualiste almeno un valore pratico, che perfino i costruttivisti dovrebbero riconoscere. L'intero problema del 'senso' non mi sembra al momento essere pronto per un giudizio definitivo. E' in particolar modo dalla ricerca in teoria della dimostrazione che ci si possono aspettare contributi significativi per rispondere a questo problema. Rimarrà sempre alla fine un residuo che è oggetto di opinione. L'obbiezione contro il senso delle proposizioni attualiste non deve essere presa in ogni caso troppo alla leggera; non è interamente priva di merito. Credo che nella teoria generale degli insiemi, per esempio, un'attenta indagine da un punto di vista di teoria della dimostrazione confermerebbe alla fine la posizione secondo la quale tutte le cardinalità che superano il numerabile sono in un senso molto preciso solo entità fittizie (*leerer Schein*) e che sarebbe saggio fare a meno di questi concetti.

Dopo queste considerazioni generali discuterò ora in dettaglio alcune delle difficoltà sollevate dalle dimostrazioni di consistenza; dovrò parlare, in particolare, del teorema di Gödel e del significato dei numeri ordinali transfiniti per le dimostrazioni di consistenza.

Gödel ha dimostrato l'importante teorema: 'La consistenza di una teoria matematica che contenga la teoria elementare dei numeri non può essere dimostrata - posto il fatto che la teoria sia consistente - con tecniche dimostrative della teoria stessa'. A prima vista sembrerebbe che la sola possibilità di una dimostrazione di consistenza sia diventata illusoria dal momento che una tale dimostrazione intende utilizzare tecniche più deboli di quelle contenute nella teoria che si vuole dimostrare consistente. Rimane del tutto concepibile, comunque, che la consistenza della teoria elementare dei numeri, per esempio, possa essere dimostrata con tecniche che siano da una parte costruttive e non coinvolgano gli aspetti attualisti della teoria elementare dei numeri, ma che, dall'altra parte, trascendano ancora la struttura della teoria elementare dei numeri. Nella mia dimostrazione tale tecnica è la regola di 'induzione transfinita' applicata a certi 'numeri ordinali transfiniti'. Indicherò brevemente cosa si intende con questo e come questi concetti siano connessi con la dimostrazione di consistenza.

Il concetto di 'numero ordinale transfinito' risale a G. Cantor ed in realtà appartiene alla teoria degli insiemi. Comunque noi avremo bisogno solo di una porzione molto limitata dei numeri ordinali sviluppati in quella teoria - un 'segmento della seconda classe di numeri' nella terminologia della teoria degli insiemi - un segmento che può essere costruito in modo strettamente costruttivo e che non ha niente in comune con gli aspetti discutibili dell'interpretazione attualista che sono particolarmente evidenti nella teoria degli insiemi e che devono essere evitati nella dimostrazione di consistenza.

I numeri ordinali transfiniti sono costruiti nel seguente modo: prima viene la successione dei numeri naturali: 1, 2, 3, ecc. Poi viene introdotto un nuovo numero ω, che per definizione si trova dopo tutti i numeri naturali. ω è seguito da $\omega + 1$, quindi da $\omega + 2$, $\omega + 3$, ecc. Al di là di tutti i numeri della forma $\omega + n$ segue $\omega \cdot 2$, poi $\omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2$, ecc., dopo di questi $\omega \cdot 3$, quindi $\omega \cdot 3 + 1$, $\omega \cdot 3 + 2$, ecc. Al di là di tutti i numeri della forma $\omega \cdot n + n$ segue il numero ω^2, quindi ancora $\omega^2 + 1$, $\omega^2 + 2, \ldots, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, ..., \omega^2 + \omega \cdot 2, ..., \omega^2 + \omega \cdot 3, ..., \omega^2 \cdot 2, ..., \omega^2 \cdot 3, ..., \omega^2 \cdot 4$, ecc, e finalmente ω^3, e ancora avanti in questo modo per formare $\omega^4, \ldots, \omega^5, \ldots$, e finalmente ω^ω, e ancora altri numeri, se si desidera. L'intera procedura - che ho qui solo abbozzato - può sembrare disorientante all'inizio. Tuttavia sono coinvolte fondamentalmente solo due operazioni la cui applicazione ripetuta automaticamente genera tutti questi numeri:

1. dato un numero già esistente, possiamo formare il suo successore (aggiunta di 1);
2. data un'infinita successione di numeri, possiamo formare un nuovo numero che si trovi al di là dell'intera successione (passaggio al limite).

La preoccupazione che questa procedura sia non-costruttiva poiché la concezione attualista di successione completa dei numeri naturali già sembra entrare nella formazione di ω, si rivela infondata. Il concetto di infinito può, senza dubbio, essere qui interpretato in modo potenziale dicendo, ad esempio: non importa quanto lontano possiamo andare nella formazione costruttiva di nuovi numeri naturali, il numero ω sta nella relazione $n < \omega$ con ogni tale numero naturale n. E le successioni infinite che nascono nella formazione di altri numeri ordinali dovrebbero essere interpretate precisamente nello stesso modo.

Ora il concetto di 'induzione transfinita'. Questa induzione è niente più di una estensione della regola di induzione completa dai numeri naturali ai numeri ordinali transfiniti. L'induzione completa può, come noto, essere formulata come segue: se una proposizione vale per il numero 1, e se è stato dimostrato che la sua validità per tutti i numeri che precedono il numero n si propaga ad n, allora la proposizione vale per tutti numeri naturali. Se noi rimpiazziamo 'numeri naturali' con 'numeri ordinali transfiniti', otteniamo la regola di induzione transfinita. Possiamo facilmente convincerci della correttezza di questa regola per segmenti iniziali della successione dei numeri transfiniti in questo modo: supponiamo che la proposizione valga per il numero 1, e che sia stato inoltre dimostrato che se la proposizione vale per tutti i numeri che precedono un certo numero ordinale vale anche per quel numero ordinale. Allora ragioniamo così: la proposizione vale per il numero 1 quindi anche per il numero 2, così anche per il 3, ecc., quindi vale per tutti i numeri naturali. Conseguentemente vale anche per il numero ω, precisamente perché vale per tutti i suoi predecessori. Per la stessa ragione vale anche per il numero $\omega + 1$, così per $\omega + 2$, ecc., e finalmente per $\omega \cdot 2$; e, corrispondentemente, mostriamo la sua validità per $\omega \cdot 3$, $\omega \cdot 4$, ecc., e infine per ω^2. Continuando in questo modo, possiamo convincere noi stessi della validità della regola di induzione transfinita salendo passo dopo passo nella successione dei numeri ordinali transfiniti. Come i numeri diventano più grandi, la situazione comincia ad apparire dichiaratamente più complicata, ma il principio rimane sempre lo stesso.

Spiegherò ora come i concetti di numeri ordinali transfiniti e la regola di induzione transfinita entrino nella dimostrazione di consistenza. La connessione è del tutto naturale e semplice. Nello svolgere una dimostrazione di consistenza per la teoria elementare dei numeri dobbiamo considerare tutte le dimostrazioni concepibili di teoria dei numeri e dobbiamo mostrare che in un certo senso, da definirsi formalmente, ogni singola dimostrazione produce un risultato 'corretto', in particolare, non produce contraddizioni. La 'correttezza' di una dimostrazione dipende dalla correttezza di certe altre dimostrazioni più semplici in essa contenute come casi speciali o parti costituenti. Questo fatto ha motivato la disposizione delle dimostrazioni in un *ordine* lineare in modo che quelle dimostrazioni dalla cui correttezza dipende la correttezza di un'altra dimostrazione precedessero quest'ultima nella successione. Questa disposizione delle dimostrazioni è effettuata associando ad ogni dimostrazione un certo numero ordinale transfinito; le dimostrazioni che precedono una data dimostrazione sono precisamente quelle dimostrazioni i cui numeri ordinali precedono il numero ordinale della dimostrazione data nella successione dei numeri ordinali. A prima vista potremmo pensare che i *numeri naturali* sono sufficienti come numeri ordinali per tale classificazione. Di fatto, comunque, abbiamo bisogno dei numeri ordinali transfiniti per la seguente ragione: può succedere che la correttezza di una dimostrazione dipenda dalla correttezza di infinite dimostrazioni più semplici. Un esempio: supponiamo che nella dimostrazione sia dimostrata una proposizione per *tutti* i numeri naturali per induzione completa. In quel caso la correttezza della dimostrazione dipenderebbe ovviamente dalla correttezza di ognuna delle infinite dimostrazioni ottenute relativizzandole ad un particolare numero naturale. In questo caso un numero naturale è insufficiente come numero ordinale per la dimostrazione, poiché ogni numero naturale è preceduto solo da un numero finito di altri numeri nell'ordine naturale. Abbiamo quindi bisogno dei numeri ordinali transfiniti per riuscire a rappresentare l'ordine naturale delle dimostrazioni disposte secondo la loro complessità.

Ora diviene chiaro perché abbiamo bisogno proprio della regola di induzione transfinita come regola cruciale per la dimostrazione di consistenza; questa regola è usata per provare la 'correttezza' di ogni singola dimostrazione. La dimostrazione numero 1 è dopotutto banalmente corretta; e una volta che è stata stabilita la correttezza di tutte le dimostrazioni che precedono nella successione una particolare dimostrazione, anche tale dimostrazione è corretta, precisamente perché l'ordinamento era stato scelto in modo che la correttezza di una dimostrazione dipendesse dalla correttezza di certe dimostrazioni precedenti. Da ciò possiamo ora ovviamente inferire la correttezza di tutte le dimostrazioni per mezzo dell'induzione transfinita, e abbiamo così dimostrato, in particolare, la consistenza desiderata.

Risulta che questa induzione transfinita è precisamente quella inferenza nella dimostrazione di consistenza che necessariamente, in accordo con il teorema di Gödel, non può essere essa stessa dimostrata corretta tramite le tecniche della teoria elementare dei numeri.

La correttezza dell'induzione transfinita è di fatto stabilita da un ragionamento speciale del tipo di quelli usati precedentemente per il numero ω^2. Ma anche per la teoria elementare dei numeri abbiamo bisogno di un segmento considerevolmente ampio di numeri transfiniti, ovvero: nello stesso modo in cui, in breve, ho definito ω^ω, otteniamo ω^{ω^ω}, poi $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, ecc., estendendo la procedura corrispondentemente; al di là di tutti questi numeri si trova ϵ_0, il primo ϵ-numero. Questo numero rappresenta il limite superiore di quel segmento di numeri ordinali transfiniti che è necessario per la dimostrazione di consistenza della teoria elementare dei numeri, se tale teoria è specificata formalmente nel modo usuale.

Mi aspetto - sebbene questa sia al momento solo una congettura - che la consistenza dell'analisi - e della teoria degli insiemi, se possibile - diventi in futuro dimostrabile nello stesso modo; in ogni caso, dovremmo poter avanzare per una distanza considerevolmente più grande nella successione dei numeri della seconda classe. Fondamentalmente, sembra emergere il seguente quadro: l'incremento in complessità del concetto di infinito nei tre livelli della matematica descritti all'inizio di questo saggio - teoria elementare dei numeri, analisi e teoria degli insiemi - è accompagnato da una corrispondente estensione della successione dei numeri ordinali transfiniti; allo stesso modo in cui il numero ϵ_0 costituisce il limite superiore per la teoria elementare dei numeri, dovremmo avere un numero specifico della seconda classe numerica come limite superiore dell'analisi, e un altro numero ancora come limite superiore per una teoria degli insiemi formalmente specificata - nella misura in cui tale teoria degli insiemi abbia senso. Tuttavia non dovremmo sopravvalutare il significato assoluto di tali numeri limite. Anche nella teoria elementare dei numeri capita che, per risolvere certi problemi associati, dovrebbero essere incluse ulteriori forme di inferenza e questo amplierebbe ancora la struttura della teoria elementare dei numeri; questo significa che sarebbero necessari numeri ordinali ancora più grandi per la dimostrazione di consistenza. Non ci può essere un confine superiore per questo; Gödel ha mostrato che qualsiasi sistema di questo tipo formalmente delimitato è incompleto, nel senso che certi problemi associati possono essere risolti solo includendo ulteriori tecniche. Ciò non fa di fatto alcuna differenza per la dimostrazione di consistenza; abbiamo solo da estendere ulteriormente la dimostrazione ad ogni inclusione di nuove tecniche.