Da *Elements of Intuitionism* di Michael Dummett, 2000, 2nd.

(Traduzione a cura di E.Tazzari e V.Armenise)

NOZIONI PRELIMINARI

1.1. Dimostrazioni costruttive

Chiunque abbia sentito parlare di intuizionismo sa che gli intuizionisti vogliono che le dimostrazioni siano costruttive. La nozione di dimostrazione costruttiva, comunque, non è affatto limitata alla matematica intuizionista o ad altre forme di matematica 'costruttivista': la distinzione tra dimostrazioni costruttive e non costruttive sorge all'interno della matematica classica ed è perfettamente intelligibile da un punto di vista platonista. Da questo punto di vista la distinzione nasce per le dimostrazioni di asserzioni esistenziali e disgiuntivi: qualsiasi dimostrazione dimostra più del teorema che è la sua conclusione e chiamare 'costruttiva' la dimostrazione di un'asserzione esistenziale o disgiuntiva (con o senza quantificatori universali iniziali) è dire qualcosa di molto specifico sull'informazione aggiuntiva che la dimostrazione fornisce. Una dimostrazione di un'asserzione chiusa della forma $\exists x A(x)$, per esempio di una in cui la variabile varia sui numeri naturali, è costruttiva soltanto nel caso in cui o dimostri essa stessa una specifica istanza $A(\overline{n})$ oppure procuri un mezzo effettivo per trovare, almeno in linea di principio, una dimostrazione di tale $A(\overline{n})$. Parimenti una dimostrazione di un'asserzione chiusa della forma $A \vee B$ è costruttiva se o è una dimostrazione o di A o di B oppure se offre, almeno in linea di principio, un modo effettivo per ottenere la dimostrazione di uno dei due disgiunti. Se un teorema esistenziale contiene un parametro, cioè è della forma $\forall x \exists y A'(x, y)$ (senza variabili libere), allora la sua dimostrazione è costruttiva se fornisce una funzione f effettivamente calcolabile tale che $A'(\overline{m}, f(\overline{m}))$ vale per ogni m; se un teorema disgiuntivo contiene un parametro, cioè è della forma $\forall x(A'(x) \vee B'(x))$ (senza variabili libere) allora la sua dimostrazione è costruttiva se fornisce un mezzo effettivo per trovare, per ogni m, una dimostrazione o di $A'(\overline{m})$ o di $B'(\overline{m})$.

Ecco un esempio molto chiaro, dovuto a Peter Rogosinski e Roger Hindley, di dimostrazione non-costruttiva:

Teorema Esistono soluzioni di $x^y = z$ con x ed y irrazionali e z razionale.

Dimostrazione $\sqrt{2}$ è irrazionale, e $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ o è razionale o è irrazionale. Se è razionale, poniamo $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ cosìche $z = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$ che, per ipotesi, è razionale. Se invece $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è irrazionale, poniamo $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$, da cui $z = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, che è certamente razionale. Perciò esiste una soluzione in entrambi i casi.

Un altro esempio è l'usuale dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass:
Teorema Se S è un sottoinsieme infinito dell'intervallo chiuso $[a, b]$, allora $[a, b]$ contiene almeno un punto di accumulazione di S.
Dimostrazione Costruiamo una successione infinita di intervalli, uno dentro l'altro, $[a_i, b_i]$ come segue. Poniamo $a_0 = a$, $b_0 = b$. Per ogni i, consideriamo due casi:

i) se $[a_i, \frac{a_i+b_i}{2}]$ contiene infiniti punti di S, poniamo $a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = b_i$;

ii) se $[a_i, \frac{a_i+b_i}{2}]$ contiene solo un numero finito di punti di S, poniamo $a_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$, $b_{i+1} = b_i$.

Allora si vede chiaramente per induzione che ogni $[a_i, b_i]$ contiene infiniti punti di S: infatti per $i = 0$ vale per ipotesi del teorema, nel caso (i) vale per definizione, e nel caso (ii) vale per ipotesi di induzione che $[a_i, b_i]$ contiene infiniti punti di S.

La successione di intervalli, uno dentro l'altro, deve convergere in un punto di $[a, b]$ ogni intorno del quale contiene infiniti, e perciò almeno uno, punti di S.

Ciascuna di queste dimostrazioni stabilisce l'esistenza di qualcosa senza fornire un mezzo effettivo per trovarlo. Nel primo caso, la dimostrazione mostra che o l'una o l'altra delle due soluzioni specifiche dell'equazione soddisfa le condizioni del teorema senza darci un modo per determinare quale. Nel secondo caso, la dimostrazione specifica una 'costruzione' che non possiamo in generale eseguire dal momento che possiamo non essere in grado di decidere se si applichi il caso (i) o il caso (ii); potremmo dire che mostra che almeno un elemento dell'insieme non-numerabile S è punto di accumulazione di S, senza fornirci il mezzo per trovarne uno in particolare. In entrambi i teoremi questo nasce dal ricorso alla legge del terzo escluso proprio quando non ci è dato modo di decidere quale alternativa valga.

Il fatto in questione non è soltanto che l'intuizionista preferisce le dimostrazioni costruttive in misura maggiore degli altri matematici. Un matematico classico può dedicare una quantità di tempo considerevole nel cercare una dimostrazione costruttiva di un risultato per il quale ne possiede già una non-costruttiva. L'intuizionista non si trova in questa posizione: deve avere una dimostrazione costruttiva poichè l'interpretazione intuizionista della conclusione è sempre tale che nessuna dimostrazione non-costruttiva può valere come sua dimostrazione. Il significato classico delle costanti logiche è dato dalle tavole di verità, le quali a loro volta dipendono dal fatto che ogni asserzione ha un determinato valore di verità. Invece di apporre a fianco della dimostrazione un segno per indicare che la dimostrazione è costruttiva, il matematico classico potrebbe usare nuove costanti logiche oltre a quelle usuali; per esempio '$A \cup B$' per 'abbiamo una dimostrazione costruttiva di $A \vee B$' e '$\mathcal{E}xA(x)$' per 'abbiamo una dimostrazione costruttiva di $\exists xA(x)$'. $\cup$ e $\mathcal{E}$ evidentemente non potranno essere vero-funzionali e tuttavia questi nuovi connettivi non soddisfano ancora i requisiti dell'intuizionista. 'Abbiamo una dimostrazione costruttiva di $A \vee B$' e 'abbiamo una dimostrazione costruttiva di $\exists xA(x)$' sono inintellegibili per un intuizionista perché i significati classici di '$\vee$' e di '$\exists$' non hanno un senso chiaro. Le costanti classiche con i loro significati vero-funzionali sono rifiutate insieme con l'assunzione che ogni asserzione abbia un determinato valore di verità sia che lo conosciamo o no. Così, ad esempio, l'unica possibile interpretazione di '$\exists$' è quella per la quale dimostrare $\exists xA(x)$ significa dimostrare, o almeno fornire un mezzo effettivo per farlo, che uno specifico elemento del dominio soddisfa $A(x)$. Pensare ad un'asserzione come vera o falsa indipendentemente dalla nostra conoscenza implica supporre una qualche realtà matematica esterna, mentre pensare che sia resa vera, se lo è, solo da una costruzione matematica non lo implica.

1.2. I significati delle costanti logiche

Il significato di ogni costante deve essere dato specificando, per ogni enunciato nel quale quella costante è l'operatore principale, cosa conti come sua dimostrazione, una volta assunto di sapere cosa conti come dimostrazione di ciascuno dei costituenti. La spiegazione di ogni costante deve soddisfare il principio secondo il quale, qualsiasi costruzione ci venga presentata, saremo sempre capaci di riconoscere effettivamente se sia o meno una dimostrazione di una data asserzione in cui quella costante occorre. Per semplicità espositiva assumeremo di occuparci, in questa prima parte, di asserti aritmetici: un enunciato atomico sarà allora un'equazione numerica e una sua dimostrazione consisterà in una computazione. Ogni istanza $A(\overline{n})$ sarà considerata come un costituente di un enunciato quantificato $\forall xA(x)$ o $\exists xA(x)$.

Le costanti logiche si dividono in due gruppi. Le prime sono $\&$,$\vee$, e $\exists$. Una dimostrazione di $A\&B$ è qualsiasi cosa che sia una dimostrazione di A e di B. Una dimostrazione di $A \vee B$ è qualsiasi cosa che sia una dimostrazione o di A o di B. Una dimostrazione di $\exists xA(x)$ è qualsiasi cosa che sia, per qualche n, una dimostrazione dell' asserzione $A(\overline{n})$. Si noti che una dimostrazione di un enunciato contenente solo le costanti $\&$,$\vee$, e $\exists$ è una computazione o un insieme finito di computazioni.

Il secondo gruppo è costituito da $\forall$, $\rightarrow$, e $\neg$. Una dimostrazione di $\forall xA(x)$ è una costruzione della quale possiamo riconoscere che, quando applicata ad un numero n, fornisce una dimostrazione di $A(\overline{n})$. Tale dimostrazione è perciò un'*operazione* che associa dimostrazioni a numeri naturali. Una dimostrazione di $A \rightarrow B$ è una costruzione della quale possiamo riconoscere che, applicata ad una qualsiasi dimostrazione di A, fornisce una dimostrazione di B. Tale dimostrazione è dunque un'operazione che associa dimostrazioni a dimostrazioni. Si noti che non sarebbe corretto caratterizzare una dimostrazione di $\forall xA(x)$ semplicemente come 'una costruzione che, quando applicata ad un qualsiasi n, produce una dimostrazione di $A(\overline{n})$', oppure una dimostrazione di $A \rightarrow B$

come 'una costruzione che trasforma ogni dimostrazione di A in una dimostrazione di B, dal momento che non avremmo poi nessun diritto di supporre di poter effettivamente riconoscere una dimostrazione allorché ce ne venga mostrata una. Pertanto dobbiamo richiedere esplicitamente che una costruzione conti come dimostrazione di $\forall x A(x)$ solo se possiamo riconoscere che fornisce, per ogni n, una dimostrazione di $A(\overline{n})$ o che conti come dimostrazione di $A \rightarrow B$ solo se possiamo riconoscere che produca la richiesta trasformazione di dimostrazioni di A in dimostrazioni di B.

Una dimostrazione di $\neg A$ è abitualmente caratterizzata come una costruzione della quale possiamo riconoscere che, se applicata ad una dimostrazione di A, fornirà una dimostrazione di una contraddizione. Questo è insoddisfacente dal momento che una 'contraddizione' è naturalmente intesa come un'asserzione del tipo $B\&\neg B$, e perciò sembra che stiamo defimendo $\neg$ in termini di se stesso. Possiamo evitare ciò in uno dei seguenti due modi. Possiamo scegliere una assezione assurda, ad esempio $0 = 1$, e dire che una dimostrazione di $\neg A$ è una dimostrazione di $A \rightarrow (0 = 1)$. In questo caso, per rendere valide le leggi della logica intuizionista, dobbiamo ammettere che, data una dimostrazione di $0 = 1$, possiamo trovare una dimostrazione di qualsiasi altra asserzione. Questo è del resto del tutto plausibile: è ovvio che possediamo un metodo sistematico per derivare da $0 = 1$ una dimostrazione di ogni equazione numerica; e da ciò si vede facilmente che possiamo dimostrare ogni asserzione matematica. Se stiamo considerando asserzioni diverse da quelle matematiche, non è cosìovvio che ogni asserzione sia derivabile da $0 = 1$ attraverso un ragionamento standard; tuttavia, se ci fosse qualche dubbio, potremmo stipulare quanto segue: *considereremo* ogni dimostrazione di $0 = 1$ come se fosse, simultaneamente, una dimostrazione di qualsiasi altra asserzione. Altrimenti dobbiamo considerare il senso di $\neg$, quando applicato ad asserzioni atomiche, come dato dal procedimento computazionale che decide quali asserzioni siano vere e quali false, e poi definire una dimostrazione di $\neg A$, per ogni asserzione non atomica A, come una dimostrazione di $A \rightarrow (B\&\neg B)$, ove B è un'asserzione atomica. Ma ancora, siamo tenuti ad ammettere che, data una dimostrazione di $B\&\neg B$, con B atomica, possiamo trovare una dimostrazione di qualsiasi altra asserzione.

Supponiamo di avere una dimostrazione dell'asserzione con variabili libere $A(x)$. Tale dimostrazione è uno schema-di–dimostrazione e fornisce una dimostrazione di $\forall x A(x)$; infatti abbiamo un metodo molto semplice per trovare, per ogni n, una dimostrazione di $A(\overline{n})$, basta sostituire la variabile libera x, in tutte le sue occorrenze all'interno dello schema-di–dimostrazione, con il numerale $\overline{n}$. Questa è un'operazione *uniforme* sui numeri naturali per ottenere dimostrazioni. Però, una dimostrazione di $\forall x A(x)$ non assume necessariamente questa forma semplice. Possiamo avere un'operazione che, applicata a qualsiasi numero n, produce una dimostrazione di $A(\overline{n})$, anche se la struttura della dimostrazione dipende dal valore di n. Un semplice esempio di ciò è dato dalla giustificazione intuizionista dell'induzione. Supponiamo di avere una dimostrazione di $A(0)$ e una dimostrazione di $\forall x(A(x) \rightarrow A(x+1))$, che possiamo supporre, per comodità, di aver ottenuto mediante una dimostrazione con variabili libere di $A(x) \rightarrow A(x + 1)$. Allora, per ogni n, possiamo trovare una dimostrazione di $A(\overline{n})$. Se $n = 1$, applichiamo il *modus* *ponens* ad $A(0)$ e $A(0) \to A(1)$; se $n = 2$, prima otteniamo $A(1)$ dal precedente passo del *modus ponens*, poi applichiamo di nuovo il *modus ponens* a $A(1)$ e $A(1) \to A(2)$ e così via. E' ben vero che non c'è uno schema-di-dimostrazione uniforme (tranne quello che permette un ricorso esplicito all'induzione); la lunghezza della dimostrazione (il numero di applicazioni del *modus ponens*) dipende da n: tuttavia possediamo un'operazione che produce una dimostrazione di $A(\overline{n})$ per ogni n, e siamo in grado di riconoscere che fa ciò.

Simili osservazioni si applicano anche a $\to$. Supponiamo di avere una dimostrazione di B ottenuta dall'ipotesi A: ovvero qualcosa che è quasi una dimostrazione di B salvo che A è citata come premessa senza giustificazione. Allora abbiamo un metodo per trasformare una dimostrazione di A in una dimostrazione di B: cioè aggiungendo la dimostrazione di B da A alla dimostrazione di A. Questa operazione sulle dimostrazioni di A per ottenere una dimostrazione di B è un'operazione *uniforme*: non dipende dalla struttura della dimostrazione di A. Ancora, una dimostrazione di $A \to B$ non deve assumere necessariamente questa forma semplice; può succedere che riconosciamo che qualche operazione che coinvolge trasformazioni interne di una data dimostrazione di A, fornisca sempre una dimostrazione di B. Se così non fosse, non potremmo allora ammettere un'inferenza da $\forall x(A(x) \to B(x))$ a $\exists x A(x) \to \exists x B(x)$ come intuizionisticamente valida, poichè sarebbe impossibile ottenere una dimostrazione costruttiva di $\exists x B(x)$ semplicemente aggiungendo qualcosa ad una dimostrazione di $\exists x A(x)$; avremmo bisogno di sapere per quale numero naturale n la dimostrazione di $\exists x A(x)$ fornisca la dimostrazione di $A(\overline{n})$. Raramente, d'altra parte, i matematici intuizionisti hanno trovato il modo di sfruttare pienamente il significato intuizionista di $\to$: la maggior parte delle dimostrazioni effettivamente date di asserzioni condizionali fanno riferimento soltanto alle proprietà più ovvie di una possibile dimostrazione dell'antecedente, fa eccezione solo la famosa dimostrazione di Brower del teorema sugli sbarramenti che sarà discusso in seguito.

E' stato sottolineato che, benché una dimostrazione intuizionista di $\forall x A(x)$ sia un'operazione che applicata a numeri naturali produce dimostrazioni, e una dimostrazione intuizionista di $A \to B$ sia un'operazione che applicata a dimostrazioni produce dimostrazioni, tali operazioni non devono essere uniformi. Si può pensare di rafforzare questo punto sostenendo che una tale nozione di operazione uniforme dei tipi suddetti - una dimostrazione con variabili libere di $A(x)$, o una dimostrazione di B da A come ipotesi - dipenda essenzialmente dal contesto del particolare sistema formale nel quale le dimostrazioni sono eseguite, e ciò non sarebbe appropriato ove ci occupassimo di dimostrazioni intuitive, non limitate ad un qualche sistema formale. Questa richiesta può essere giusta, ma evidentemente non è così e perciò farvi affidamento sarebbe imprudente. Soltanto un'analisi più approfondita del concetto di dimostrazione (intuitiva) nei cui termini sono fornite le spiegazioni delle costanti logiche intuizioniste, potrebbe rivelare se, relativamente ad esso, esistano oppure no specifiche nozioni di dimostrazioni con variabili libere e di dimostrazioni da ipotesi.

La spiegazione di $\to$ deve essere intesa *estensionalmente* nel senso che i cosiddetti paradossi dell'implicazione materiale valgono anche per il $\rightarrow$ intuizionista. Se abbiamo già una dimostrazione di B, allora esiste un'operazione molto semplice che fornisce una dimostrazione di B da A, e possiamo riconoscere che fa ciò: cioè, gettiamo via la dimostrazione di A, e rimpiazziamola con la già nota dimostrazione di B. Perciò possiamo sempre derivare $A \rightarrow B$ da B. Similmente supponiamo di avere una dimostrazione di $\neg A$, ovvero un'operazione che trasformi una dimostrazione di A in una dimostrazione di $0 = 1$. Abbiamo assunto che, per qualsiasi asserzione B, abbiamo un'operazione che trasforma una dimostrazione di $0 = 1$ in una dimostrazione di B. Quindi, combinando le due operazioni, ne otteniamo una che trasforma una dimostrazione di A in una dimostrazione di B, e così abbiamo una dimostrazione di $A \rightarrow B$. Possiamo così sempre inferire $A \rightarrow B$ da $\neg A$.

In generale, le tavole di verità dei connettivi sono corrette intuizionisticamente nel seguente senso. Si interpreti ogni riga della tavola come una regola di inferenza con due premesse: una premessa è A se ad A viene assegnato il valore Vero, e $\neg A$ se ad A viene assegnato il valore Falso, e l'altra premessa è parimenti o B o $\neg B$; la conclusione è o l'asserzione complessa o la sua negazione a seconda che riceva il valore Vero o Falso. Allora tutte queste inferenze sono intuizionisticamente corrette. (Per esempio la tavola di verità di & racchiude, in questo senso, le quattro regole di inferenza:

$$\frac{A \quad B}{A\&B} \qquad \frac{A \quad \neg B}{\neg(A\&B)} \qquad \frac{\neg A \quad B}{\neg(A\&B)} \qquad \frac{\neg A \quad \neg B}{\neg(A\&B)}$$

e quella del $\rightarrow$ incorpora:

$$\frac{A \quad B}{A \rightarrow B} \qquad \frac{A \quad \neg B}{\neg(A \rightarrow B)} \qquad \frac{\neg A \quad B}{A \rightarrow B} \qquad \frac{\neg A \quad \neg B}{\neg(A \rightarrow B)}$$

e similmente per $\vee$). Naturalmente, l'assunzione classica che i vari assegnamenti esauriscano tutte le possibilità non è intuizionisticamente corretta.

In un senso intuitivo molto vago si potrebbe dire che il connettivo intuizionista $\rightarrow$ è più forte del classico $\rightarrow$. Ciò non significa che l'asserzione intuizionista $A \rightarrow B$ è più forte della classica $A \rightarrow B$, perché, intuitivamente, anche l'antecedente del condizionale intuizionista è più forte. L'antecedente classico è che A è *vero*, senza tener conto del fatto che possiamo riconoscerlo come tale o no. Intuizionisticamente questo è inintelligibile: l'antecedente intuizionista è che A è (intuizionisticamente) *dimostrabile*, e questa è un'assunzione più forte. Dobbiamo far vedere di poter dimostrare B sotto l'ipotesi non soltanto che si dia il caso che A (ipotesi intuizionistivamente senza significato), ma anche che sia stata data una *dimostrazione* di A. Quindi l'$A \rightarrow B$ intuizionista e il classico $A \rightarrow B$ sono *inconfrontabili* rispetto alla loro forza. Talvolta possiamo avere una dimostrazione classica di $A \rightarrow B$ ove ne manchi una intuizionista, ma non c'è nessuna ragione per la quale non debba valere anche l' inverso. (Questa osservazione si applica a teorie matematiche intuizioniste in generale: la *logica* intuizionista del primo ordine è di fatto un sottosistema della logica classica.)

Poichè $\neg$ è di fatto un caso di $\rightarrow$, lo stesso vale per la negazione intuizionista. Classicamente, quello che dobbiamo mostrare assurdo è la supposizione che A sia *vera*, indipendentemente dalla nostra conoscenza; intuizionisticamente,invece, tutto quello che dobbiamo mostrare come assurdo è la supposizione di avere una dimostrazione di A. E' impossibile, quindi, trovarsi nella posizione di asserire, di una qualsiasi asserzione A, che A non sia (assolutamente) nè dimostrabile nè refutabile. Infatti una dimostrazione che A non è dimostrabile vale come una dimostrazione di $\neg A$, cioè una refutazione di A; infatti in base all'osservazione fatta sopra sui paradossi dell'implicazione materiale, se abbiamo stabilito che A non può mai essere dimostrata, abbiamo stabilito che $A \rightarrow B$ vale per ogni B, e quindi in particolare che $A \rightarrow (0 = 1)$, e cioè che vale $\neg A$. Se assumiamo di non poter mai ottenere una dimostrazione di $0 = 1$, allora una dimostrazione di $\neg A$ può essere identificata con una dimostrazione dell'indimostrabilità di A; infatti se, di contro, prima di sapere se A possa essere dimostrata o meno, troviamo un modo di trasformare ogni dimostrazione di A in una dimostrazione di $0 = 1$, allora possiamo inferire che A non sarà mai dimostrata. Poiché una dimostrazione di $\neg A$ è equivalente ad una dimostrazione che A non sarà mai dimostrata, sarebbe un errore totale cercare di rimpiazzare la dicotomia classica vero/falso con la tricotomia dimostrabile/refutabile/indecidibile.

La legge del terzo escluso

Evidentemente l'asserzione $A \vee \neg A$ non è intuizionisticamente valida. Questo significa, in particolare, che non siamo autorizzati a derivare B da $A \rightarrow B$ e $\neg A \rightarrow B$. La caduta della legge del terzo escluso viene spesso spiegata facendo appello al significato della disgiunzione intuizionista: una dimostrazione di $A \vee B$ è una dimostrazione o di A o di B, e dunque dire di avere dimostrato $A \vee \neg A$ equivale a dire di avere dimostrato A o di avere dimostrato $\neg A$. Questa spiegazione è corretta per quanto vale, ma lascerà un platonista con la sensazione che il significato imposto a $\vee$ sia arbitrario: qualsiasi sia il punto di vista per il quale o A o $\neg A$ deve essere vera a prescindere dal poterlo dimostrare, respingere il senso di $\vee$ per il quale possiamo asserire $A \vee \neg A$ a priori, significa negare a noi stessi i mezzi per esprimere ciò che siamo in grado di afferrare con la mente. Pertanto nessuna spiegazione del rifiuto intuizionista delle legge del terzo escluso è adeguata a meno che non sia basata sul rifiuto intuizionista della nozione platonista di verità matematica intesa come realizzantesi indipendentemente dalla nostra capacità di dare una dimostrazione. Preso questo in considerazione, l'interpretazione intuizionista della disgiunzione non apparirà più arbitraria, ma come l'unica possibile, e la caduta della legge del terzo escluso non apparirà più come dipendente da una qualche peculiarità dell'interpretazione di $\vee$.

Niente abbiamo detto finora sull'atteggiamento intuizionista verso la nozione di verità che indichi se il predicato 'è vero' debba essere considerato temporale o atemporale: se, da un punto di vista platonista, si applica atemporalmente a ogni asserzione matematica alla quale si possa applicare, oppure se si aplichi a tale asserzione solamente nel momento in cui ne venga data una dimostrazione. Secondo la seconda interpretazione, 'è vero' dovrebbe essere equiparato a 'è stato dimostrato' ed 'è falso' a 'è stato refutato'. Secondo questo uso, qualsiasi asserzione A che non sia stata ancora decisa, non è né vera né falso; ma ciò non preclude che in seguito divenga o vera o falsa. Naturalmlente, in una prospettiva in cui queste nozioni temporali di verità matematica sono le uniche ammissibili, la legge del terzo escluso sarà vera in senso stretto solo per asserzioni che siano già state decise.

Comunque, non è necessario adottare un approccio così radicale della nozione di verità matematica per rigettare la legge del terzo escluso su base intuizionista. Sarebbe possibile per un costruttivista convenire con un platonista sul fatto che un'asserzione matematica, se vera, è vera atemporalmente: quando un'asserzione è dimostrata, con ciò si mostra che è stata vera da sempre. Dire questo è, in effetti, equiparare 'A è vero' con 'possiamo dimostrare A' piuttosto che a 'A è stato dimostrato' ed equiparare 'A è falso' a 'non possiamo dimostrare A'. Tale interpretazione di 'vero' e 'falso' rimane fedele ai principi basilari dell'intuizionismo soltanto se 'possiamo dimostrare A' ('A è dimostrabile') non è intesa significare né, da una parte, che indipendentemente dalla nostra conoscenza, esiste qualcosa tale che, se ne diventiamo consapevoli, potremmo riconoscere come dimostrazione di A, né dall'altra, tantomeno, che, di fatto, o abbiamo dimostrato A oppure che dimostreremo A in futuro. Nel primo caso dovremo fare appello ad un regno oggettivo di dimostrazioni platonisticamente concepito, nel secondo, invece, saremo autorizzati a negare che A era dimostrabile su basi non-matematiche (per esempio se fosse imminente l' estinzione della razza umana). 'Possiamo dimostrare A' deve essere inteso nel senso di essere reso vero soltanto dal nostro dimostrare effettivamente A, e di essere reso falso soltanto dal nostro trovare un ostacolo puramente matematico alla sua dimostrazione. Da ogni punto di vista, quindi, non può esserci alcuna garanzia che ogni asserzione matematica sia o vera o falsa.

Sulla base della prima interpretazione di 'A è vero', intesa in modo temporale, cioè nel senso di 'A è stato dimostrato', l'asserzione 'A è falso', cioè '$\neg A$ è vero' è molto più forte di 'A non è vero'. Ma quando 'A è vero' è inteso in modo atemporale, cioè nel senso di 'possiamo dimostrare A', allora 'A non è vero' ed 'A è falso' possono essere considerati uguali, dal momento che l' unica cosa in virtù della quale il primo può valere è una dimostrazione della indimostrabilità di A, e cioè una dimostrazione di $\neg A$. Quindi, secondo questa interpretazione, la verità di $A \vee \neg A$ dipende dal nostro essere capaci o di dimostrare A o di mostrare che non potremo mai farlo, che non possiamo, in generale, sostenere di essere capaci di farlo.

Asserire un'asserzione matematica

Abbiamo spiegato la disgiunzione dicendo che una dimostrazione di $A \vee B$ è una dimostrazione o di A o di B e abbiamo spiegato la quantificazione esistenziale dicendo che una dimostrazione di $\exists x A(x)$ è una dimostrazione dell'asserzione $A(\overline{n})$ per qualche n. In pratica, comunque, i matematici intuizionisti non si limitano ad asserire, anche nel corso della dimostrazione di qualche altro teorema, solo quelle asserzioni disgiuntive o esistenziali per le quali hanno realmente una dimostrazione; considerano sufficiente avere un mezzo, almeno in linea di principio, per ottenerne una dimostrazione. Il caso più sorprendente è un'istanza $A \vee \neg A$ della legge del terzo escluso, ove A sia un'asserzione effettivamente decidibile, per esempio che un qualche numero molto grande è primo. E' perfettamente accettabile intuizionisticamente che si dimostrai un teorema facendo vedere che segue vuoi dall'assunzione che un qualche numero grande N sia primo e vuoi da quella che N non sia primo: non è richiesto che si debba realmente decidere la questione prima di considerare il teorema come stabilito. In generale è legittimo asserire $A \vee B$ a patto che abbiamo un mezzo effettivo di cui riconosciamo che può fornire una dimostrazione o di A o di B ed è legittimo asserire $\exists x A(x)$ se abbiamo un mezzo effettivo di cui riconosciamo che può fornire un particolare numero n ed una dimostrazione di $A(\overline{n})$. Potremmo cercare di tener conto di questa pratica per rivedere la nostra specificazione di ciò che conti come dimostrazione di un'asserzione disgiuntiva o esistenziale. E' preferibile, comunque, lasciare questa specificazione immutata, e piuttosto stipulare che asserire un'asserzione matematica debba essere interpretato, non come sostenere di averne una dimostrazione ma unicamente come sostenere di avere un modo effettivo, in linea di principio, per ottenerne una dimostrazione. Si noti che, nel caso di un condizionale, di una negazione o di un'asserzione quantificata universalmente, questa stipulazione non fa alcuna differenza: un mezzo effettivo per ottenere una dimostrazione di un'asserzione di una qualsiasi di queste forme è già una dimostrazione di quella asserzione. Si noti inoltre che, anche secondo una prospettiva classica, la significatività di un atto assertivo è questione di accordo convenzionale: uno può immaginare persone che asseriscono senza indugi un'asserzione matematica perfino sulla base di un ragionamento meramente plausibile (nel senso di Pólya), e che hanno lo stesso interesse che abbiamo noi nella nozione di dimostrazione conclusiva, e la cui matematica è sotto ogni altro aspetto la stessa della nostra.

Asserire $A \vee \neg A$ è perciò sostenere di avere o di essere capaci di trovare o una dimostrazione o una refutazione di A. Parimenti possiamo usare $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ per esprimere che $A(x)$ è un predicato effettivamente decidibile.

Ancora sulle dimostrazioni costruttive

I significati degli operatori classici $\cup$ e $\mathcal{E}$ considerati nella sezione 1.1 differiscono da quelli intuizionisti $\vee$ e $\exists$ solo perché i primi fanno parte di un linguaggio nel quale le costanti logiche classiche sono dotate di significato. Ciò non deve sorprendere poichè, affinché un' operazione sia effettiva, è richiesto non soltanto che ogni passo sia rigidamente determinato, ma anche che l'operazione debba terminare ad un certo punto, e quindi un quantificatore esistenziale è incorporato nel significato di 'costruttivo'. Classicamente un'asserzione della forma

$$\neg\forall x \neg A(x) \rightarrow \exists x A(x)$$

è logicamente vera; ma non possiamo asserire ciò intuizionisticamente poiché, dal fatto che $\forall x \neg A(x)$ conduce a contraddizione, non segue minimamente che (prendendo che x vari sui numeri naturali) possiamo trovare un qualche n tale che $A(\overline{n})$. Alla stessa stregua, non saremmo classicamente autorizzati ad asserire neppure

$$\neg \forall x \neg A(x) \rightarrow \mathcal{E} x A(x),$$

tuttavia *possiamo* asserire classicamente

$$\forall x(A(x) \cup \neg A(x)) \& \neg \forall x \neg A(x) \ \rightarrow \mathcal{E} x A(x):$$

se abbiamo un mezzo effettivo per decidere, per ogni n, se $A(\overline{n})$ o $\neg A(\overline{n})$, e sappiamo che non ogni numero falsifica $A(x)$ allora possiamo realmente trovare un numero che lo soddisfi. La ragione di ciò è semplicemente la ben nota osservazione secondo la quale, se $\neg \forall x \neg A(x)$ vale, allora il procedimendo consistente nell'esaminare ogni numero $0, 1, 2, \ldots$ per vedere se soddisfi $A(x)$ - interrompendosi quando si trovi un numero che lo soddisfi - deve terminare. Ma il principio corrispondente (conosciuto come Principio di Markov)

$$\forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \& \neg \forall x \neg A(x) \ \rightarrow \exists x A(x)$$

non vale intuizionisticamente. La versione classica per cui $\neg \forall x \neg A(x)$ significa 'è un dato di fatto che non si darà mai il caso che si trovi che $A(x)$ fallisce per ogni numero', è un'asserzione che non è intuizionisticamente intelligibile: intuizionisticamente possiamo considerarla solo nel senso di 'possiamo derivare una contraddizione dal supporre che possiamo dimostrare che $A(x)$ fallisca per ogni numero', proposizione da cui non possiamo trarre alcuna garanzia, esaminando un numero dopo l'altro, che alla fine ne troviamo uno che soddisfa $A(x)$. L'accettazione dei significati classici delle costanti logiche ci spinge a riconoscere come costruttive dimostrazioni che altrimenti non potremmo considerare tali.

Domini di quantificazione

Finora, in questa presentazione preliminare delle costanti logiche, abbiamo assunto che le asserzioni alle quali si applicano siano aritmetiche. Il vantaggio di questa scelta risiede solo in piccola parte nella chiarezza della nozione di dimostrazione di un'asserzione atomica; la motivazione principale è stata quella di semplificare la discussione sui quantificatori.

E' essenziale per la trattazione classica della quantificazione che sia possibile una trattazione uniforme per tutti i domini non vuoti; pressupposto cruciale della logica classica è che l'interpretazione dei quantificatori rimanga la stessa sia che il dominio sia finito o infinito, numerabile o non-numerabile. Intuizionisticamente dobbiamo richiedere che ogni dominio D non solo sia non vuoto ($\neg \forall x \notin D$), ma anche che sia *abitato* ($\exists x \in D$) -

che possiamo esibire almeno un elemento del quale possiamo positivamente asserire che appartiene a D. Ma, benché ci sia certamente un senso nel quale i quantificatori intuizionisti hanno significati determinati, costanti da un dominio ad un altro, non possiamo assumere senza uno sforzo ulteriore che possano essere spiegati nello stesso modo per tutti i domini abitati.

Classicamente l'unica significativa distinzione tra domini è quella relativa alla loro cardinalità. Intuizionisticamente possiamo, in prima istanza, distinguere tra domini a seconda che siano decidibili o meno: un dominio D è *decidibile* se possiamo decidere, per ogni oggetto, se esso appartiene o non appartiene a D $(\forall x(x \in D \vee x \notin D))$. Il caso più semplice è quello di un dominio finito. Come in un contesto classico, D è *finito* se esiste una corrispondenza uno-uno di D *su*[1] un segmento iniziale dei numeri naturali. Per via dei significati costruttivi dei quantificatori esistenziali contenuti in questa definizione, d'altra parte, dire che D è finito è più forte che dire che esiste una corrispondenza *in* un qualche segmento iniziale (ovvero che c'è un confine superiore finito alla sua grandezza). Un linguaggio in cui i predicati primitivi siano decidibili e in cui le variabili varino sopra un dominio finito soddisferà le leggi della logica classica: ogni asserzione sarà decidibile. In generale non si richiede che un dominio di quantificazione sia decidibile, anche quando possiamo dare un confine superiore finito alla sua grandezza: un dominio può essere specificato da un qualsiasi predicato dotato di significato. Come esemplificazione, consideriamo il dominio consistente nell'estensione del predicato '$x = 0 \quad \vee \quad (F \quad \& \quad x = 1)$', ove '$F$' abbrevia l'asserzione della congettura di Goldbach.[2] In questo caso sappiamo che il dominio ha almeno uno e al massimo due elementi e che 0 appartiene ad esso; se la congettura di Goldbach viene dimostrata, sapremo che 1 appartiene al dominio, e se viene refutata, sapremo che soltanto 0 appartiene al dominio; ma finché la congettura non sarà decisa, non sappiamo se 1 appartiene al dominio oppure no. Un altro caso potrebbe essere il dominio dato dal predicato '$x = 0 \quad \vee \quad [(F \vee \neg F) \quad \& \quad x = 1]$' dove '$F$' ha il medesimo significato. In questo caso sapremo che 1 appartiene al dominio non appena la congettura di Goldbach sia decisa, se mai lo sarà; ma non ci troveremo mai nella posizione di dire che 1 non appartiene al dominio.

Nella matematica intuizionista ogni oggetto matematico deve sempre essere considerato come identificabile attraverso una qualche descrizione finita, che determini a *quale* oggetto particolare facciamo riferimento. (Non vale sempre che la descrizione identificante ci permetta da sola di derivare tutto ciò che possiamo sapere dell'oggetto). Un dominio decidibile deve essere caratterizzato in modo che la descrizione identificante di ogni elemento ci permetta sempre di riconoscerlo come appartenente a quel dominio. Ciò non si può richiedere per i domini indecidibili del tipo di quelli citati sopra, perché altrimenti sarebbero richieste descrizioni diverse del numero 1 a seconda che sia considerato come appartenente o al primo o al secondo di quei due domini, o semplicemente al dominio dei numeri naturali, e difficilmente vorremo affermare che ci stiamo occupando

[1] Corsivo del traduttore.

[2] Ogni numero pari maggiore o uguale a 4 è la somma di due numeri primi. NdT.

di tre oggetti intensionalmente distinti nei tre casi. E' pertanto necessario incorporare questa condizione nella spiegazione dei quantificatori ogniqualvolta il dominio sia indecidibile: una dimostrazione di $\exists x A(x)$ è una dimostrazione di un'asserzione della forma $A(t)$, insieme con una dimostrazione che l'oggetto denotato dal termine t appartiene al dominio; ed una dimostrazione di $\forall x A(x)$ è una costruzione per la quale possiamo riconoscere che, se applicata ad ogni termine t e ad una dimostrazione che l'oggetto denotato da t appartiene al dominio, fornisce una dimostrazione di $A(t)$. Evidentemente quando il dominio della quantificazione è indecidibile, allora, anche quando conosciamo un confine superiore finito per la sua grandezza e tutte le asserzioni atomiche sono decidibili, la legge del terzo escluso non varrà per tutte le asserzioni.

Il dominio dei numeri naturali è l'esempio più semplice di dominio infinito: non solamente è decidibile, ma possiamo effettivamente enumerare i suoi elementi. Naturalmente la decidibilità di un dominio è relativa al modo in cui si pensa siano dati i suoi elementi; sarebbe legittimo descrivere un numero naturale in modo tale che poi sia necessaria una dimostrazione del fatto che è un numero naturale, per esempio descrivendolo come un ordinale di un certo tipo; per stabilire che l'ordinale è un numero naturale avremo bisogno di una dimostrazione del fatto che è finito. Comunque, dal momento che i numeri naturali possono essere enumerati, nello spiegare i quantificatori, potremmo assumere che fossero dati (ad esempio in termini di 0 e dell'operazione di successore) in modo che non potesse nascere alcuna questione riguardo al loro essere numeri naturali. Non appena consideriamo un dominio che non può essere effettivamente enumerato, i quantificatori hanno bisogno di essere spiegati nel modo visto sopra, vale a dire mediante il riferimento ad una dimostrazione del fatto che un dato oggetto appartenga al dominio. Un caso semplice potrebbe essere il dominio di tutte le funzioni effettivamente calcolabili dai numeri naturali ai numeri naturali. Possediamo un'idea intuitiva perfettamente chiara di che cosa sia una tale funzione, e qualsiasi regola di computazione che dia i valori di una funzione di questo tipo può essere finitamente descritta; tuttavia non possediamo nessun mezzo effettivo per enumerare la totalità di queste funzioni, dal momento che non possiamo circoscrivere i mezzi per descrivere regole di computazione in modo tale da includere una regola che governi ogni funzione effettivamente calcolabile, e parimenti da rendere immediatamente riconoscibile che la regola in questione sia effettiva. Quindi dobbiamo pensare a ogni tale funzione come data da un'asserzione finita della regola per computare i suoi valori, ma spiegare la quantificazione esistenziale ed universale sopra queste funzioni nel modo sopra esposto, dove ora i termini considerati inglobano regole di computazione, ed una dimostrazione che la funzione appartiene al dominio sarà una dimostrazione che la regola è effettiva ed ovunque applicabile.

La descrizione mediante la quale viene dato un oggetto matematico deve sempre essere tale da permettere di distinguerlo da altri oggetti dello stesso tipo. Comunque, poiché gli oggetti matematici sono costruzioni mentali, e la costruzione mentale è espressa mediante la descrizione con cui l'oggetto ci è dato, gli oggetti della matematica intuizionista devono, in generale, essere considerati oggetti intensionali; ovvero il criterio di identità dato per loro insieme al modo in cui l'oggetto è presentato, è relato all'identità della descrizione. Così, ad esempio, se una funzione effettivamente calcolabile è pensata come data mediante una regola di computazione, differenti regole determineranno funzioni intensionalmente differenti anche se queste funzioni sono estensionalmente equivalenti, cioè hanno gli stessi valori per gli stessi argomenti. Usualmente, l'identita intensionale è simbolizzata dal segno $\equiv$, e si assume che sia decidibile, cioè abbiamo $\forall x \forall y(x \equiv y \vee \neg x \equiv y)$; possiamo sempre riconoscere effettivamente se due descrizioni sono la stessa oppure no. Per la maggior parte degli scopi, comunque, anche se gli oggetti della nostra teoria sono intensionali, siamo interessati alle loro proprietà estensionali, e saremo capaci di introdurre una nozione di uguaglianza estensionale simbolizzata dall'ordinario segno di uguaglianza $=$; per esempio, nel caso di funzioni, '$f = g$' può essere assunta come definita da '$\forall x(f(x) = g(x))$'. L'uguaglianza estensionale non sarà in generale decidibile; nei casi in cui lo è, si dovrà dimostrare che così è.

Al pari di domini come quello di tutte le funzioni effettivamente calcolabili sui numeri naturali, possiamo considerare domini nei quali non ogni elemento può essere completamente caratterizzato da una descrizione finita; poiché tale oggetto deve, in ogni contesto particolare, essere dato da una descrizione finita, non potrà mai essere completamente dato. Per un dominio di questo tipo sarà necessaria un'ulteriore stipulazione riguardo ai significati intesi dei quantificatori; questa questione sarà trattata di nuovo in seguito.

1.3 Esempi di principi logici

Tutte le usuali regole di introduzione e di eliminazione per un sistema classico di deduzione naturale nel quale $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, e $\exists$ siano presi come primitivi sono intuizionisticamente valide fatta eccezione per la regola della doppia negazione $\dfrac{\neg\neg A}{A}$. Abbiamo una dimostrazione di $\neg\neg A$ quando possiamo mostrare che non avremo mai una dimostrazione di $\neg A$, cioè quando possiamo mostrare che non avremo mai una dimostrazione del fatto che A non potrà essere mai dimostrata; chiaramente, ciò non corrisponde ad una dimostrazione di A stessa, e quindi $\dfrac{\neg\neg A}{A}$ non è una forma valida di inferenza. D'altro canto una dimostrazione di A vale come una dimostrazione del fatto che A non sarà mai refutata, poiché altrimenti la possibilità di derivare una contraddizione resterebbe aperta; quindi $\dfrac{A}{\neg\neg A}$ è valida. La contrapposizione vale in generale tranne che, ovviamente, in quei casi in cui l'uso della regola non valida di doppia negazione è nascosto. Così, dato $A \rightarrow B$, se abbiamo una dimostrazione che B non può mai essere provata, allora chiaramente neppure A potrà mai esserlo, dal momento che potremmo trasformare una dimostrazione di A in una dimostrazione di B. Così $\dfrac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$ è valida e pure $\dfrac{A \rightarrow \neg B}{B \rightarrow \neg A}$, invece $\dfrac{\neg B \rightarrow \neg A}{A \rightarrow B}$ e $\dfrac{\neg A \rightarrow \neg B}{B \rightarrow A}$ non sono valide. Per contrapposizione $\neg\neg\neg A$ è equivalente a $\neg A$, poiché $\dfrac{A}{\neg\neg A}$ è valida. Poiché vale la regola di eliminazione della $\vee$ e possiamo derivare $\neg\neg A \to A$ da A e da $\neg A$, l'inferenza $\dfrac{A \vee \neg A}{\neg\neg A \to A}$ è ammessa. Così, se la legge del terzo escluso vale per una particolare A, allora vale anche $\neg\neg A \to A$. La freccia inversa non è vera dal momento che $\dfrac{\neg\neg A \to A}{A \vee \neg A}$ non è valida. Si noti che il conseguente di qualsiasi conclusione stabilita per contrapposizione deve essere un'asserzione negata. Per la stessa ragione (caduta di $\dfrac{\neg\neg A}{A}$), anche se il ricorso alla *reductio ad absurdum* è pienamente accettabile, può essere usato solo per ottenere conclusioni negate; in altre parole, mentre le inferenze $\dfrac{A \to B \quad A \to \neg B}{\neg A}$ e $\dfrac{\neg A \to B \quad \neg A \to \neg B}{\neg\neg A}$ sono valide, $\dfrac{\neg A \to B \quad \neg A \to \neg B}{A}$ non lo è.

Mentre i connettivi classici possono essere tutti definiti in termini di $\neg$ e di un qualsiasi altro connettivo, tutti e tre i connettivi elencati sopra sono intuizionisticamente indipendenti ($A \leftrightarrow B$ può essere preso come definito da $(A \to B)\&(B \to A)$). Benché si abbiano i paradossi dell'implicazione materiale, e quindi $\dfrac{\neg A \vee B}{A \to B}$ sia valido, $A \to B$ non è equivalente a $\neg A \vee B$: è chiaro che il fatto che possiamo trasformare qualsiasi dimostrazione di A in una dimostrazione di B non implica in nessun modo che possiamo ottenere o una dimostrazione di $\neg A$ o una dimostrazione di B. Analogamente, $\dfrac{A \to B}{\neg(A\&\neg B)}$ è valido, ma l'inverso no. Da $\neg(A\&\neg B)$ siamo autorizzati solo ad inferire il condizionale più debole $A \to \neg\neg B$. Queste due formule sono equivalenti fra loro, e a molte altre, come è mostrato dalla seguente catena di inferenze. Da $A \to \neg\neg B$, attraverso $\dfrac{A \to \neg B}{B \to \neg A}$, abbiamo $\neg B \to \neg A$; via contrapposizione otteniamo $\neg\neg A \to \neg\neg B$. Ora, utilizzando $\dfrac{A \to B}{\neg(A\&\neg B)}$ e $\dfrac{\neg\neg\neg A}{\neg A}$ abbiamo $\neg(\neg\neg A\&\neg B)$. Supposto di avere una dimostrazione di $\neg(A \to B)$, allora per i paradossi dell'implicazione materiale, non potremo mai disporre di una dimostrazione di B e non potremo mai disporre di una dimostrazione di $\neg A$: così $\dfrac{\neg(A \to B)}{\neg\neg A\&\neg B}$ è una inferenza valida e, per contrapposizione, lo è anche $\dfrac{\neg(\neg\neg A\&\neg B)}{\neg\neg(A \to B)}$. Infine da $\neg\neg(A \to B)$ possiamo inferire $\neg(A\&\neg B)$ per contrapposizione $\dfrac{A\&\neg B}{\neg(A \to B)}$ che è ovviamente valida. Abbiamo ora mostrato che sono intuizionisticamente equivalenti: $\neg(A\&\neg B)$, $A \to \neg\neg B$, $\neg B \to \neg A$, $\neg\neg A \to \neg\neg B$, $\neg(\neg\neg A\&\neg B)$, e $\neg\neg(A \to B)$.

La interdefinibilità classica di $\vee$ e & cade intuizionisticamente a causa della caduta delle inferenze $\frac{\neg(\neg A \& \neg B)}{A \vee B}$ e $\frac{\neg(\neg A \vee \neg B)}{A \& B}$. Comunque le leggi di De Morgan valgono ancora nella forma $\frac{\neg(a \vee B)}{\neg A \& \neg B}$. (La doppia linea indica deriviabilità in entrambe le direzioni). Un ultimo importante esempio da segnalare è la caduta dell'inferenza $\frac{A \to (B \vee C)}{(A \to B) \vee (A \to C)}$. Supponiamo di poter trasformare ogni dimostrazione di A in una dimostrazione di $B \vee C$. Allora, data una qualsiasi dimostrazione di A, possiamo convertirla o in una dimostrazione di B o in una dimostrazione di C, ma potrebbe dipendere dalla particolare dimostrazione di A se possa essere trasformata in una dimostrazione di una piuttosto che dell'altra; può essere che alcune dimostrazioni di A possano essere convertite in dimostrazioni di B e altre in dimostrazioni di C. Tuttavia da ciò non segue che possiamo o trasformare ogni dimostrazione di A in una dimostrazione di B oppure trasformare ogni dimostrazione di A in una dimostrazione di C.

Qui notiamo (senza dimostrarlo) che ogniqualvolta $\neg A$ è un teorema della logica classica enunciativa, è anche teorema della logica intuizionista. Così se A e B sono inconsistenti (cioè se $\neg(A \& B)$ è dimostrabile) rispetto alla logica enunciativa classica, allora sono inconsistenti intuizionisticamente, e se A è dimostrabile nella logica enunciativa classica, allora $\neg\neg A$ è dimostrabile intuizionisticamente. Quindi, in particolare, $\neg\neg(A \vee \neg A)$ è dimostrabile. Se aggiungiamo lo schema $A \vee \neg A$ a qualsiasi sistema assiomatico per la logica enunciativa intuizionista, otteniamo il sistema classico. E' una conseguenza del fatto che $\neg\neg(A \vee \neg A)$ è dimostrabile, che lo stesso è vero se aggiungiamo $\neg\neg A \to A$.

E' chiaro direttamente dai significati dei quantificatori che $\frac{\forall x \neg Fx}{\neg \exists x Fx}$ e $\frac{\exists x \neg Fx}{\neg \forall x Fx}$ sono valide. $\frac{\neg \forall x Fx}{\exists x \neg Fx}$ cade dal momento che, assumendo che la quantificazione sia sui numeri naturali, possiamo sapere che non potremo mai dimostrare $\forall x Fx$ senza essere capaci di esibire un particolare n per il quale abbiamo una dimostrazione di $\neg F\overline{n}$. Da queste regole insieme con la logica enunciativa, i rapporti positivi mostrati nel seguente diagramma tra formule costruite per mezzo dei quantificatori e della negazione possono essere stabiliti facilmente.

$$
\begin{array}{c}
\forall x\, Fx \\
\hline
\neg\neg\forall x\, Fx \\
\hline
\left\{ \begin{array}{c} \forall x\, \neg\neg Fx \\ \neg\neg\forall x\, \neg\neg Fx \\ \neg\exists x\, \neg Fx \end{array} \right\}
\end{array}
\qquad\qquad
\left\{ \begin{array}{c} \forall x\, \neg Fx \\ \neg\neg\forall x\, \neg Fx \\ \neg\exists x \neg\neg Fx \\ \neg\exists x\, Fx \end{array} \right\}
$$

$$
\begin{array}{c}
\exists x\, Fx \\ \hline
\exists x\, \neg\neg Fx \\ \hline
\left\{ \begin{array}{c} \neg\neg\exists x\, Fx \\ \neg\neg\exists x\, \neg\neg Fx \\ \neg\forall x\, \neg Fx \end{array} \right\}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\exists x\, \neg Fx \\ \hline
\left\{ \begin{array}{c} \neg\neg\exists x\, \neg Fx \\ \neg\forall x\, \neg\neg Fx \end{array} \right\} \\ \hline
\neg\forall x\, Fx
\end{array}
$$

Qui le espressioni tra parentesi sono tutte equivalenti. Ovviamente abbiamo anche $\dfrac{\forall xFx}{\exists xFx}$ e quindi $\dfrac{\forall x\neg Fx}{\exists x\neg Fx}$ e $\dfrac{\forall x\neg\neg Fx}{\exists x\neg\neg Fx}$ purché, naturalmente, richiediamo che il dominio di quantificazione sia abitato, cioè che conosciamo almeno un suo elemento; ma, all'interno di ognuno dei quattro gruppi, non vale nessuna implicazione oltre quelle indicate. Per esempio, possiamo essere capaci di far vedere che non possiamo mai dimostrare che ogni numero naturale non gode di una certa proprietà, senza essere in grado di trovare un numero specifico n del quale possiamo mostrare che non possiamo mai dimostrare che non gode della proprietà, e quindi l'inferenza $\dfrac{\neg\forall x\neg Fx}{\exists x\neg\neg Fx}$ non è valida. In particolare, poiché $\neg\forall xFx$ non implica nemmeno la doppia negazione di $\exists x\neg Fx$ (né $\neg\exists x\neg Fx$ implica la doppia negazione di $\forall xFx$), la congiunzione $\neg\forall xFx\&\neg\exists x\neg Fx$ è consistente: non possiamo escludere la possibilità di essere capaci di mostrare simultaneamente che non possiamo mai dimostrare che ogni oggetto ha una determinata proprietà e che non possiamo mai trovare un oggetto specifico che non ne goda. Questa congiunzione fornisce un esempio per mostrare che la nostra osservazione conclusiva sulla logica enunciativa non vale per la logica predicativa: la sua negazione non è dimostrabile intuizionisticamente benché lo sia classicamente; i due congiunti sono formule che sono classicamente, ma non intuizionisticamente, inconsistenti fra loro. Resta perciò aperta la possibilità che ci siano teoremi della matematica intuizionista che siano in contraddizione con la logica predicativa classica, ma non con la logica enunciativa.

Gli enunciati intuizionisti, diversamente da quelli classici, non hanno in generale equivalenti in forma normale prenessa. Il controesempio più semplice è $\neg\forall xFx$ che non solo non è equivalente a $\exists x\neg Fx$, ma, di fatto, non è equivalente a nessun'altra, più complessa, formula prenessa. Alcune delle equivalenze classiche impiegate per ottenere forme normali prenesse sono valide intuizionisticamente: per esempio $\begin{array}{c}\exists x(Fx\&A)\\ \hline\hline \exists xFx\&A\end{array}$, $\begin{array}{c}\forall x(Fx\&A)\\ \hline\hline \forall xFx\&A\end{array}$, $\begin{array}{c}\exists x(Fx\vee A)\\ \hline\hline \exists xFx\vee A\end{array}$, $\begin{array}{c}\forall x(A\rightarrow Fx)\\ \hline\hline A\rightarrow\forall xFx\end{array}$ e $\begin{array}{c}\forall x(Fx\rightarrow A)\\ \hline\hline \exists xFx\rightarrow A\end{array}$. Comunque, mentre $\dfrac{\exists x(Fx\rightarrow A)}{\forall xFx\rightarrow A}$, $\dfrac{\exists x(A\rightarrow Fx)}{A\rightarrow\exists xFx}$ e $\dfrac{\forall xFx\vee A}{\forall x(Fx\vee A)}$ valgono tutte, l'inverso non vale mai. La caduta della prima di queste tre inferenze classicamente valide è quella più ovvia: poter trasformare ogni dimostrazione che qualcosa ha la proprietà F in una dimostrazione della proposizione A non implica affatto che possiamo trovare un particolare oggetto tale da poter trasformare una dimostrazione che esso ha la proprietà F in una dimostrazione di A. La caduta della seconda inferenza è parallela alla non validità di $\dfrac{A \to (B \vee C)}{(A \to B) \vee (A \to C)}$: anche se, per ogni dimostrazione di A possiamo trovare un oggetto che ha la proprietà F, non c'è alcun motivo per supporre che l'oggetto così trovato sia indipendente dalla particolare dimostrazione di A; possiamo non essere in grado di trovare un oggetto tale che ogni dimostrazione di A possa essere trasformata in una dimostrazione del fatto che esso ha la proprietà F. Per l'ultimo caso, che è il più interessante, si supponga una volta di più che la quantificazione sia sui numeri naturali. Allora avere una dimostrazione di $\forall x(Fx \vee A)$ significa avere un'operazione effettiva che associ ad ogni numero n una dimostrazione o di $F\overline{n}$ o di A. D'altra parte, dal momento che ci sono infiniti casi da considerare, non possiamo in generale dire se l'operazione fornirà di fatto una dimostrazione di A oppure se fornirà una dimostrazione di $F\overline{n}$ per ogni n; non siamo quindi in generale nella posizione di poter asserire o A o $\forall xFx$ e non abbiamo alcuna garanzia che saremo in tale posizione dopo qualsiasi numero finito di applicazioni dell'operazione che costituisce la dimostrazione di $\forall x(Fx \vee A)$.

1.4 Completezza funzionale

Ci sono infinitamente tante formule contenenti una sola lettera enunciativa p, e formano una struttura davvero notevole. Poniamo $P_0 = p\&\neg p$, $P_1 = p$, $P_2 = \neg p$, $P_3 = \neg\neg p$, $P_4 = p \vee \neg p$, $P_5 = \neg\neg p \to p$, $P_6 = \neg p \vee \neg\neg p$ e, per $n > 2$, $P_{2n+1} = P_{2n-1} \to P_{2n-2}$ e $P_{2n+2} = P_{2n-3} \vee P_{2n-1}$. Allora nessuna delle formule P_n è intuizionisticamente valida, e ogni formula contenente la sola lettera enunciativa p è equivalente a P_n per qualche n, a meno che non sia intuizionisticamente valida, nel qual caso è equivalente a $p \to p$; inoltre per n ed m diversi, P_n e P_m non sono mai equivalenti. Per tutti gli $n > 3$, P_n è una tautologia classica. P_1 implica P_3 e P_2 implica P_4 ma non P_3; a parte questi casi, se n è pari, P_n implica P_m per tutti gli $m > n$, e, se n è dispari, P_n implica P_m esattamente quando $m - n > 2$. La parte inferiore della struttura dei P_n si presenta così:

$$\begin{tikzcd}
P_9 & & P_{10} & \\
& P_8 \arrow[ul] \arrow[ur] & & P_7 \arrow[ul] \\
P_5 \arrow[ur] & & P_6 \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& P_4 \arrow[ul] \arrow[ur] & & P_3 \arrow[ul] \\
P_2 \arrow[ur] & & P_1 \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& P_0 \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

P_7 è $(\neg\neg p \to p) \to p \vee \neg p$, e P_8 è $\neg\neg p \vee (\neg\neg p \to p)$. Ogni formula implica ogni altra cui sia connessa da una freccia.
E' interessante chiedersi se l'insieme degli operatori enunciativi $\neg$, &, $\vee$, e $\to$ sia 'funzionalmente completo', cioè se ogni operatore enunciativo intuizionisticamente significativo sia definibile attraverso di essi. E' facile mostrare che ogni operatore vero-funzionale classico è definibile in termini di $\neg$ e uno qualsiasi degli altri tre operatori binari. Lo stesso non vale per la logica intuizionista. Un semplice controesempio è l'operatore **o**, ove '**o**(p)' significa che P_n vale per qualche n; questa è una disgiunzione infinita di tutti i P_n, è ovviamente dotata di significato ed è ugualmente ovvio che non è definibile attraverso gli operatori standard. Un altro esempio è l'operatore #, ove '$\#(p)$' significa che, per qualche proposizione q, $p \leftrightarrow (\neg q \vee \neg\neg q)$.