Alberi: definizioni e dimostrazioni induttive.

Gennaio 2005

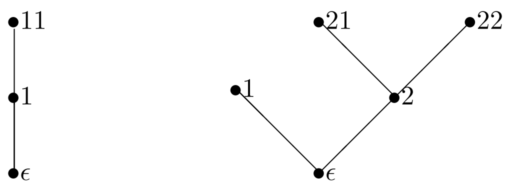
Iniziamo con l'introdurre la nozione di albero. Con N indichiamo l'insieme dei numeri naturali (zero escluso) e con N^* l'insieme delle liste finite di numeri naturali (inclusa la lista vuota che chiamiamo ϵ).

Un **albero** T è un sottoinsieme non vuoto di N^* (cioè un insieme di liste di numeri naturali) con le seguenti proprietà:

i) se $\alpha \in T$ e $\alpha = \beta\gamma$, allora $\beta \in T$;

ii) se $\alpha\, i \in T$ e $j < i$, allora $\alpha\, j \in T$.

Per esempio, i due alberi della figura sottostante corrispondono rispettivamente agli insiemi di liste $\{\epsilon, 1, 11\}$ e $\{\epsilon, 1, 2, 21, 22\}$. Il nodo 21 dell'albero (b) viene così indicato perché il percorso per raggiungerlo dalla radice consiste nel prendere il secondo nodo della biforcazione e poi il primo nodo della biforcazione successiva. Lette in questo modo, le condizioni i) e ii) della definizione di albero risultano trasparenti: la condizione i) dice che se l'albero contiene il percorso che arriva al nodo α deve contenere ogni segmento iniziale di tale percorso, mentre la condizione ii) dice ad esempio che, se la biforcazione al nodo α contiene il terzo successore $\alpha\, 3$, allora deve contenere anche il primo ed il secondo dei successori, cioè $\alpha\, 1$ e $\alpha\, 2$.



(a) (b)

Per ogni nodo α, i nodi del tipo $\alpha\, i$ sono detti *successori immediati* (o *figli*) di α. Un nodo senza successori immediati è detto *foglia*. T è a *ramificazione finita* (o *finitario*) sse ogni nodo di T ha un numero finito di successori immediati (in queste note, per albero intenderemo sempre un albero a ramificazione finita).

Un *ramo* di T è una successione finita o infinita di nodi $\alpha_0, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n, \ldots$ tali che

$\alpha_0 = \epsilon$,

per ogni $i \geq 1$, α_i è successore immediato di α_{i-1},
l'ultimo nodo, se esiste, è una foglia.

Per ogni nodo α, *il ramo sotto* α è costituito dai nodi $\alpha_0, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ tali che
$\alpha_0 = \epsilon$
$\alpha_n = \alpha$
per ogni $i, 1 \leq i \leq n$, α_i è successore immediato di α_{i-1}.

Entrambi gli alberi (a) e (b) della figura sopra sono a ramificazione finita. Nell'albero descritto in (a) esiste un'unica foglia, il nodo 11. Nell'albero in (b) le foglie sono i nodi 1 e 21, 22. Un esempio di ramo nell'albero in (b) è la seguente successione: ϵ, 2, 21. In (b) la radice ϵ ha due successori immediati, i nodi 1 e 2, in (a) la radice ϵ ha un solo successore immediato, il nodo 1.

L'**alfabeto** del linguaggio enunciativo $\mathcal{L}^0$ è costituito da:

variabili enunciative p_0, p_1, p_2,...

la costante enunciativa $\perp$

le costanti logiche $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$

le parentesi (,).

Definizione induttiva dell'insieme, $\mathcal{F}m^0$, delle formule ben formate di $\mathcal{L}^0$.

$p_i \in \mathcal{F}m^0, \quad i \in N,$

$\perp \in \mathcal{F}m^0,$

se $A \in \mathcal{F}m^0$, allora $(\neg A) \in \mathcal{F}m^0$

se $A \in \mathcal{F}m^0$ e $B \in \mathcal{F}m^0$, allora $(A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B) \in \mathcal{F}m^0$

nient'altro è in $\mathcal{F}m^0$.

La prima clausola stabilisce quali sono gli elementi iniziali, le altre clausole stabiliscono le operazioni con le quali si ottengono nuovi elementi a partire da elementi già dati e l'ultima clusola esprime una condizione di chiusura.

Dato un insieme X definito per induzione, possiamo DIMOSTRARE proprietà degli elementi di X facendo appello a come tali elementi sono stati costruiti.

Teorema **Principio di induzione sulla costruzione delle formule.** Sia ϕ una proprietà, allora $\phi(A)$ vale per ogni $A \in \mathcal{F}m^0$ se

$\phi(p_i)$, per ogni $i \in N$,

$\phi(\perp)$,

se $\phi(A)$, allora $\phi(\neg A)$

se $\phi(A)$ e $\phi(B)$, allora $\phi((A \vee B)), \phi((A \wedge B)), \phi((A \to B))$.

Dimostrazione. Sia $X = \{A : \phi(A)\}$. Allora X soddisfa tutte le condizioni della definizione 1.1, così $\mathcal{F}m^0 \subseteq X$, cioè per ogni $A \in \mathcal{F}m^0$, $\phi(A)$ vale.

Chiameremo una applicazione del teorema appena enunciato, una *dimostrazione per induzione su A*. Il lettore noterà una ovvia similarità fra questo teorema ed il principio di induzione matematica.

Diamo ora un esempio banale di dimostrazione per induzione. In pratica verificheremo solo le clausole della dimostrazione per induzione e lasciamo la conclusione al lettore.

1. *Ogni formula ben formata ha un numero pari di parentesi.*
Dimostrazione. (i) Ogni atomo ha 0 parentesi e 0 è pari
(ii) $\perp$ ha 0 parentesi e 0 è pari.
(iii) Supponi che A abbia $2n$ parentesi, allora $(\neg A)$ ha $2n+2$, ovvero $2(n+1)$ parentesi.
(iv) Supponi che A abbia $2n$ parentesi e B abbia $2m$ parentesi, allora $(A \star B)$ ha $2(n+m+1)$ parentesi, ove $\star \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

Dato un insieme X definito per induzione, possiamo DEFINIRE funzioni sugli elementi di X facendo appello a come tali elementi sono stati costruiti. Siffatte funzioni sono dette *definite per recursione*.

Esempi. 1. Definiamo la funzione $\pi(A)$ che computa quante sono le parentesi di A. Basta porre:

$\pi(p_i) = 0$, per ogni atomo p_i,

$\pi(\perp) = 0$,

$\pi((\neg A)) = \pi(A) + 2$,

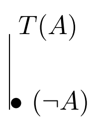
$\pi((A \star B)) = \pi(A) + \pi(B) + 2$.

2. Definiamo la funzione che associa ad ogni formula A associa il suo l'albero di formazione (*parsing tree*) $T(A)$.

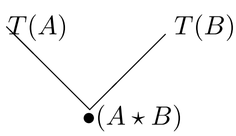
$T(p_i) =$ $\bullet$ per ogni atomo p_i,

$T(\perp) =$ $\bullet$

$T((\neg A)) =$



$T((A \star B)) =$



3. La *lunghezza* (*size*) di una formula A è così definita:

$lg(p_i) = 0$, per ogni atomo p_i,

$lg(\perp) = 0$,

$lg((\neg A)) = \lg(A) + 1$,

$lg((A \star B)) = \lg(A) + \lg(B) + 1$.

3. La *altezza* (*height*) di una formula A è così definita:

$h(p_i) = 0$, per ogni atomo p_i,

$h(\perp) = 0$,

$h((\neg A)) = h(A) + 1$,

$h((A \star B)) = max(h(A), h(B)) + 1$.

4. L'*insieme delle sottoformule* di una formula A è così definito:

$Sf(p_i) = \{p_i\}$, per ogni atomo p_i,

$Sf(\perp) = \{\perp\}$,

$Sf(\neg A) = Sf(A) \cup \{\neg A\}$,

$Sf(A \star B) = Sf(A) \cup Sf(B) \cup \{A \star B\}$.

Diciamo che B è *sottoformula* di A se $B \in Sf(A)$.

Nota. La correttezza di questa procedura definitoria dipende dal teorema che garantisce l'esistenza delle funzioni definite per recursione.

L'introduzione delle funzioni *lunghezza* (*size*) e *altezza* (*height*) non è una mera illustrazione della "definizione per recursione", ci permette anche di dimostrare fatti sulle formule per mezzo del principio di induzione matematica. Abbiamo, per così dire, ridotto la struttura di albero a quella della linea retta dei numeri naturali.

Principio di induzione sull'altezza delle formule Se per ogni formula A, [$\phi(B)$ per tutte le formule B tali che $h(B) < h(A)$] implica $\phi(A)$, allora $\phi(A)$ vale per ogni $A \in \mathcal{L}^0$.

Si può mostrare facilmente che il principio di induzione sulla costruzione di A ed il principio di induzione sull'altezza di A sono equivalenti (vedi D. van Dalen, *Logic and Structure*, p.13.)

Torniamo ora agli alberi come definiti all'inizio e limitiamo la nostra attenzione agli alberi *finiti*, ovvero agli alberi contenenti un numero finito di nodi.

La *lunghezza di un ramo* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ è n, ovvero è uguale al numero dei suoi nodi meno la radice.

L'*altezza* (*height*) di un albero finito è la lunghezza del suo ramo più lungo.

Principio di induzione sull'altezza degli alberi Se per ogni albero T, $[\phi(T^\star)$ per tutti gli alberi $T^\star$ tali che $h(T^\star) < h(T)]$ implica $\phi(T)$, allora $\phi(T)$ vale per ogni albero T.

Il principio di induzione sull'altezza degli alberi si può esprimere come regola ad una sola premessa:

$$\frac{[\text{per ogni albero } T^\star \text{ tale che } h(T^\star) < h(T), \;\; \text{si ha } \phi(T^\star)] \;\; \text{implica} \;\; \phi(T)}{\text{per ogni albero } T, \;\; \phi(T).}$$

Usualmente la premessa della regola di induzione si dimostra attraverso la seguente strategia:

Base

- Si dimostra che ogni albero T tale che $h(T) = 0$ gode della proprietà ϕ.

Passo

- Si considera un *generico* T tale che $h(T) = n > 0$.
- Si assume, **ipotesi di induzione**, che tutti gli alberi $T^\star$ tali che $h(T^\star) < h(T)$ godano della proprità ϕ.
- Si dimostra che T gode di ϕ.

Intuitivamente, col passo si fa vedere che la proprietà ϕ *si trasmette* dagli alberi di altezza minore di n a quelli di altezza n, per un n qualsiasi maggiore di 0, quindi dagli alberi di altezza 0 a quelli di altezza 1, da quelli di altezza 1 a quelli di altezza 2, da quelli di altezza 2 a quelli di altezza 3, e così via.
Poichè ϕ vale per gli alberi di altezza 0 (base), ϕ vale per tutti gli alberi.