Statistiche d'ordine

Moreno Marzolla
Dip. di Scienze dell'Informazione
Università di Bologna

marzolla@cs.unibo.it
http://www.moreno.marzolla.name/

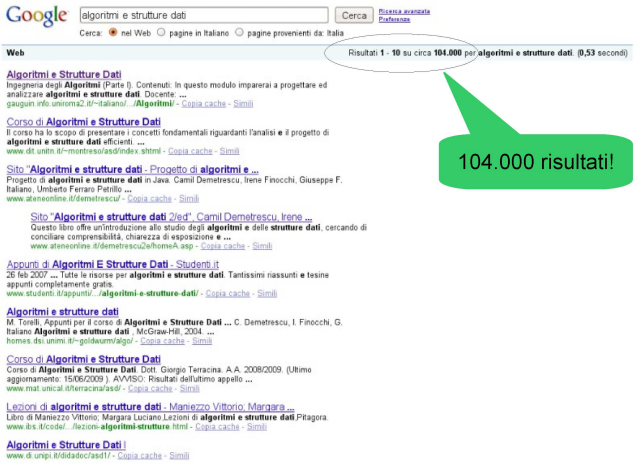
Statistiche

- Algoritmi statistici su vettori: estraggono alcune caratteristiche statisticamente rilevanti
- Esempi
  - Media: μ = (A[1] + A[2] + ... + A[n])/n
  - Varianza: (sample variance): $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A[i]-\mu)^2$
  - Moda: il valore (o valori) più frequente
  - Mediano: il valore che occuperebbe la posizione (n/2) se l'array fosse ordinato
  - Selezione del k-esimo minimo: dato un array A[1..n] di valori distinti e un valore 1 ≤ k ≤ n, trovare l'elemento che è maggiore di esattamente k-1 elementi

Statistiche: Classificazione

- Statistiche distributive (*algebriche*)
  - Oltre ai dati originali di dimensione n, richiedono uno spazio O(1) per essere calcolate
  - Non richiedono ordine
  - Esempi: Media, varianza, momenti, etc.
- Statistiche d'ordine (*olistiche*)
  - Sono basate sul concetto d'ordine
  - Richiedono uno spazio O(f(n)) per essere calcolate
  - Esempi: Moda (valore piu' frequente), mediana, selezione
  - Metodo semplice: Ordinamento + estrazione:
    → tempo O(n log n)

Selezione del k-esimo: a che serve?



Selezione del k-esimo: a che serve?

- I motori di ricerca producono molti risultati a fronte di una singola query
- I risultati vengono mostrati in pagine, in ordine decrescente di rilevanza
  - Nella prima pagina i risultati più rilevanti
  - Nella seconda quelli meno, e così via
- È inutile ordinare tutti i risultati in base alla rilevanza
  - Quanti vanno frequentemente oltre la quarta pagina di risultati della ricerca?
- È quindi utile selezionare i primi k risultati, e via via i successivi, se l'utente seleziona le altre pagine
  - Stay tuned

Selezione: casi particolari Ricerca del minimo (massimo)

```
algorithm minimum(array A[1..n]) → elem
  min := A[1];
  for i := 2 to n do
    if (A[i] < min) then
      min = A[i];
    endif
  endfor
  return min;
```

- T(n) = n-1 = Θ(n) confronti

Selezione: casi particolari Ricerca del minimo e massimo

```
algorithm min-max(array A[1..n])
                  → (elem, elem)
  min := +∞;
  max := -∞;
  for i := 1 to n-1 step 2 do
    if (A[i] ≤ A[i+1]) then
      if (A[i] < min) then
        min := A[i];
      endif
      if (A[i+1] > max) then
        max := A[i+1];
      endif
    else
      if (A[i] > max) then
        max := A[i];
      endif
      if (A[i+1] < min) then
        min := A[i];
      endif
    endif
  return (min,max);
```

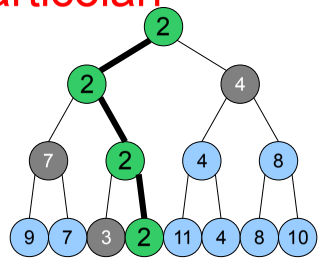
- Algoritmo banale:
  - due istanze di min, max
  - Costo:
    T(n) = 2n-2 = Θ(n) confronti
- Algoritmo “ottimizzato”
  - assumiamo n pari
  - Costo:
    T(n) = 3n/2 = Θ(n) confronti

Selezione: casi particolari

- Ricerca del secondo minimo
  - Trovare il secondo elemento più piccolo dell'array A[]
  - Costo: 2n-3 confronti nel caso peggiore (il caso peggiore si verifica quando i valori sono in ordine decrescente)

```
algorithm minimum2(array A[1..n]) → elem
  min1 := A[1];
  min2 := A[2];
  if (min2 < min1) then
     swap(min1, min2);
  endif
  for i:= 3 to n do
    if (A[i] < min2) then
      min2 = A[i];
      if (min2 < min1) then
        swap(min1, min2);
      endif
    endif
  return min2;
```


Selezione: casi particolari



- Ricerca del secondo minimo
  - L'albero del torneo permette di dimostrare che il secondo minimo si può trovare in n + *O(log n)* confronti nel caso pessimo
  - Dimostrazione
    - *n* passi necessari per la ricerca del minimo
    - Siano *M* e *S* il minimo e il secondo minimo
    - Sicuramente c'è stato un "incontro" fra *M* e *S*, dove *M* ha "vinto"
    - Se così non fosse, esisterebbe un valore *X*<*S* che ha "battuto" *S, il che* è assurdo dalla definizione di *S*
  - Quindi, basta cercare nei *log n* valori "battuti" direttamente da *m* per trovare il secondo minimo. Totale: n + *O(log n)*

Selezione del k-esimo elemento

```
algorithm select(array A[1..n], int k) → elem
   for i:=1 to k do
      minIndex := i;
      minValue := A[i];
      for j:=i+1 to n do
          if (A[j] < minValue) then
              minIndex := j;
              minValue := A[j];
          endif
      endfor
      swap A[i] and A[minIndex];
   endfor
   return A[k];
```

- In sostanza un Selection Sort incompleto
  - Si ferma al k-esimo elemento
- Costo Θ(kn)

Selezione per piccoli valori di k

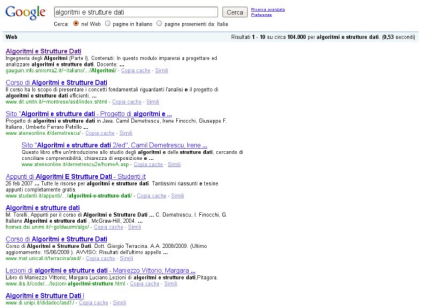
- Costruisco un min-heap a partire dai valori
  - Costo O(n)
- Estraggo per *k-1* volte il minimo
  - Costo O(k log n)
- Il k-esimo minimo è l'elemento minimo che rimane
  - Costo complessivo: *O(n + k log n)*

```
algorithm heapselect(array A[1..n], int k) → elem
  min-heapify(A);
  for i := 1 to k-1 do
     deleteMin(A);
  endfor
  return findMin(A);
```

Questa funzione costruisce un min-heap

Esempio

- Estrarre i primi k elementi da una query che ha fornito n match costa O(n + k log n) = O(n) se k è O(n/log n)
  - Esempio: k=10, n=104000



Esempio

- Le cose vanno meno bene se k è funzione di n
- Esempio: voglio calcolare il valore mediano
  - Cioè il valore che occuperebbe la posizione centrale se l'array fosse ordinato
- In questo caso k = n/2, e per valori sufficientemente grandi di n il costo è

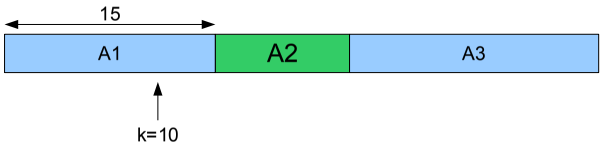
$$O(n + k \log n) = O(n + (n/2) \log n) = O(n \log n)$$

Adattamento di quicksort al problema della selezione

```
algorithm select1( array A[1..n], int k ) -> elem
    scegli un elemento x in A
    A1 := {y in A: y < x }
    A2 := {y in A: y = x }
    A3 := {y in A: y > x }
    quicksort(A1);
    quicksort(A3);
    ritorna il k-esimo elemento della concatenazione di A1, A2, A3
```

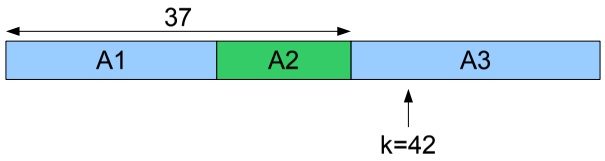
- Idea
  - Approccio divide-et-impera simile al QuickSort...
  - ...però essendo un problema di ricerca, non è necessario cercare in tutte le partizioni, basta cercare in una sola

Adattamento di quicksort al problema della selezione



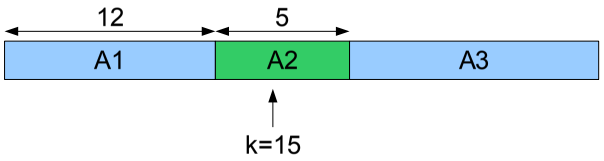
- In realtà non serve considerare tutto il vettore!
  - Supponiamo di cercare il 10mo minimo;
  - Supponiamo che A1 abbia 15 elementi
  - Il valore cercato sicuramente sta in A1

Adattamento di quicksort al problema della selezione



- In realtà non serve considerare tutto il vettore!
  - Supponiamo di cercare il 42mo minimo;
  - Supponiamo che A1 e A2 abbiano 37 elementi
  - Il valore cercato è il (42-37)=5 di A3

Adattamento di quicksort al problema della selezione

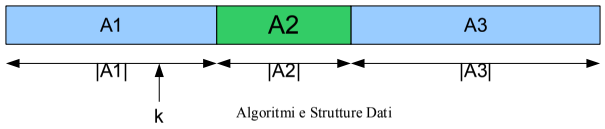


- In realtà non serve considerare tutto il vettore!
  - Supponiamo di cercare il 15mo minimo;
  - Supponiamo che A1 abbia 12 elementi e A2 ne abbia 5
  - Il valore cercato si trova in A2

Algoritmo quickSelect()

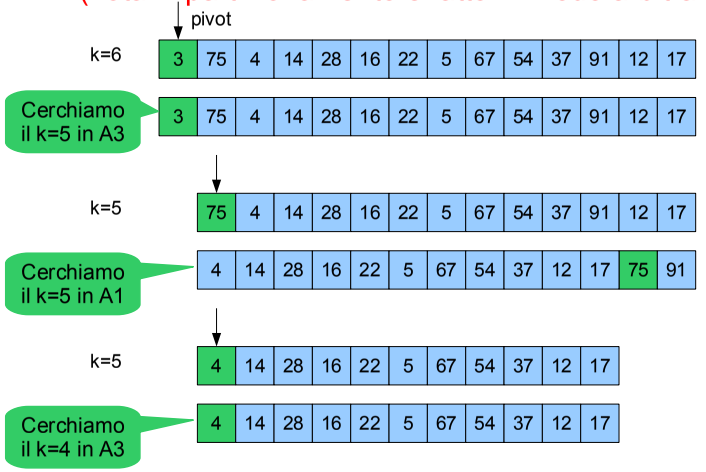
```
algorithm quickSelect( Array A, int k ) → elem
   scegli un elemento x in A
   A1 := {y in A: y < x }
   A2 := {y in A: y = x }
   A3 := {y in A: y > x }
   if ( k ≤ |A1| ) then
      return quickSelect( A1, k );
   else
      if ( k > |A1| + |A2| ) then
         return quickSelect( A3, k - |A1| - |A2| );
      else
         return x;
      endif
   endif
```

A1, A2, e A3 possono essere determinati con l'algoritmo della "bandiera nazionale"

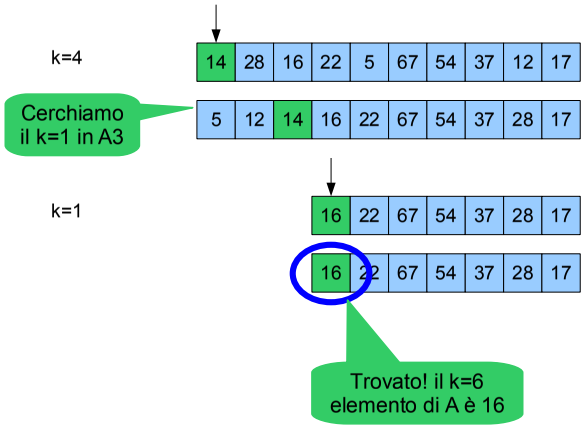


Esempio

(nota: il partizionamento è fatto in modo arbitrario)



Esempio (cont.)



Analisi dell'algoritmo quickSelect()

- Costo nel caso ottimo
  - $T(n) = T(n/2) + \Theta(n) = \Theta(n)$
  - (Caso (3) del Master Theorem)
- Costo nel caso pessimo
  - $T(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$
  - (Dimostrazione come nel caso di Quick Sort)
- ...e nel caso medio?

Analisi del caso medio

- Ad ogni iterazione si elimina, nell'ipotesi peggiore, una parte di vettore di lunghezza |A2| + min(|A1|, |A3|)
  - Eliminiamo A2 perché altrimenti l'algoritmo sarebbe terminato;
  - Nell'ipotesi peggiore, scartiamo il sottovettore più corto tra A1 e A3
- Il numero di elementi scartati è un qualsiasi numero compreso tra 1 e n/2
- La probabilità di ricorrere su un sottovettore di lunghezza i è ≈1/(n/2) = 2/n per i=n/2, n/2+1, ... n-1

Analisi del caso medio

- Si ha la seguente relazione di ricorrenza per esprimere il numero T(n) di confronti richiesti:

$$T(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=n/2}^{n-1} T(i)$$

- Teorema: la soluzione all'equazione di ricorrenza di cui sopra è $T(n) \leq 4n$

Costo del partizionamento usando la funzione partition(), la stessa di Quick Sort

Dimostrazione

- Per sostituzione, dimostriamo che T(n) ≤ cn per una opportuna costante c

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n-1+\frac{2}{n}\sum_{i=n/2}^{n-1} T(i) \\
&\le n-1+\frac{2}{n}\sum_{i=n/2}^{n-1} ci \\
&= n-1+\frac{2c}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i-\sum_{i=1}^{n/2-1} i\right)
\end{aligned}
$$

Dimostrazione

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le n-1+\frac{2c}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i-\sum_{i=1}^{n/2-1} i\right) \\
&= n-1+\frac{2c}{n}\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n^2}{8}-\frac{n}{4}\right) \\
&= \left(1+\frac{3c}{4}\right)n-1-\frac{c}{2} \\
&\le \left(1+\frac{3c}{4}\right)n \le cn
\end{aligned}
$$

Ricordiamo che $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$

- L'induzione funziona quando (1+3c/4) ≤ c, ossia c ≥ 4

Possiamo fare ancora meglio?

- Sì, anche se non facilmente
- Esiste un algoritmo deterministico per la selezione del k-esimo elemento che ha costo O(n) nel caso peggiore
  - Nota: il costo non dipende da k!